Plaquette 4 – Loi de probabilité et espérance

Probabilités et variables aléatoires — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

La loi de probabilité. On la présente en tableau :

x_i	x_1	x_2	**…**	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Contrôle systématique :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

L'espérance.

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

C'est la moyenne des valeurs, **pondérée par les probabilités**.

Signe de $E(X)$	**Lecture pour un jeu**
$E(X) > 0$	favorable au joueur
$E(X) = 0$	jeu **équitable**
$E(X) < 0$	favorable à l'organisateur

Gain net. Si le joueur mise m euros :

$$\text{gain net} = \text{gain brut} - m \qquad E(\text{net}) = E(\text{brut}) - m$$

⚠ L'espérance n'est **pas** une valeur que X prend forcément : un dé a pour espérance 3,5.

Correction de l'exercice 1 – Définir une variable aléatoire

a) Le gain vaut 10 € si le dé donne 6, et −2 € (une perte) sinon : X prend les valeurs -2 et 10.

b) Le dé est équilibré : $P(X = 10) = \frac{1}{6}$ et $P(X = -2) = \frac{5}{6}$.

x_i	-2	10
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Contrôle. $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$.

c) L'espérance est la moyenne des valeurs pondérée par leurs probabilités :

$$E(X) = (-2) \times \frac{5}{6} + 10 \times \frac{1}{6} = -\frac{10}{6} + \frac{10}{6} = 0$$

Le jeu est **équitable** : sur un grand nombre de parties, le joueur ne gagne ni ne perd en moyenne.

Réponse. a) -2 et 10 — b) $P(X = -2) = \frac{5}{6}$, $P(X = 10) = \frac{1}{6}$ — c) $E(X) = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Compléter une loi

a) La somme des probabilités d'une loi vaut 1 :

$$P(X = 3) = 1 - (0{,}2 + 0{,}35 + 0{,}15) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

b) $X \geq 3$ correspond aux valeurs 3 et 10 :

$$P(X \geq 3) = 0{,}3 + 0{,}15 = 0{,}45$$

c) $X < 0$ correspond à la seule valeur -5 : $P(X < 0) = 0{,}2$.

Attention aux inégalités. « ≥ 3 » inclut la valeur 3 ; « < 0 » exclut 0.

Réponse. a) 0,3 — b) 0,45 — c) 0,2.

Correction de l'exercice 3 – Calculer une espérance

On multiplie chaque valeur par sa probabilité, puis on additionne :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$$

$$E(X) = (-5) \times 0{,}2 + 0 \times 0{,}35 + 3 \times 0{,}3 + 10 \times 0{,}15 = -1 + 0 + 0{,}9 + 1{,}5 = 1{,}4$$

Interprétation. Si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois, la moyenne des valeurs obtenues se rapproche de 1,4. Ce n'est pas une valeur que X peut prendre : c'est une **moyenne à long terme**.

Réponse. $E(X) = 1{,}4$.

Correction de l'exercice 4 – Une loi de Bernoulli

a) L'appel n'a que deux issues : une vente (succès) ou pas de vente (échec). X vaut 1 en cas de succès, avec la probabilité $p = 0{,}2$, et 0 sinon : X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** 0,2.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	0,8	0,2

b) Pour une loi de Bernoulli, l'espérance est égale au paramètre :

$$E(X) = 0 \times 0{,}8 + 1 \times 0{,}2 = 0{,}2$$

Sur un grand nombre d'appels, le vendeur conclut en moyenne 0,2 vente par appel, soit une vente pour 5 appels.

c) Si l'appel aboutit, le gain est $45 - 6 = 39$ € ; sinon, l'appel a seulement coûté 6 €, et le gain est -6 €.

$$E(G) = 39 \times 0{,}2 + (-6) \times 0{,}8 = 7{,}8 - 4{,}8 = 3 \text{ €}$$

Chaque appel rapporte donc en moyenne 3 € : la prospection téléphonique est rentable.

Réponse. a) loi de Bernoulli de paramètre 0,2 — b) $E(X) = 0{,}2$ — c) $E(G) = 3$ €.

Correction de l'exercice 5 – Loi d'une somme de deux dés

Les 36 couples de résultats sont équiprobables.

a) La somme 7 est obtenue par 6 couples : (1 ; 6), (2 ; 5), (3 ; 4), (4 ; 3), (5 ; 2), (6 ; 1), donc $P(S = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. La somme 2 n'est obtenue que par (1 ; 1) : $P(S = 2) = \frac{1}{36}$.

b) La loi de S est **symétrique** autour de 7 : la somme $7 - k$ et la somme $7 + k$ ont la même probabilité (par exemple $P(S = 2) = P(S = 12) = \frac{1}{36}$, $P(S = 6) = P(S = 8) = \frac{5}{36}$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Dans le calcul de l'espérance, les écarts à 7 se compensent deux à deux, donc

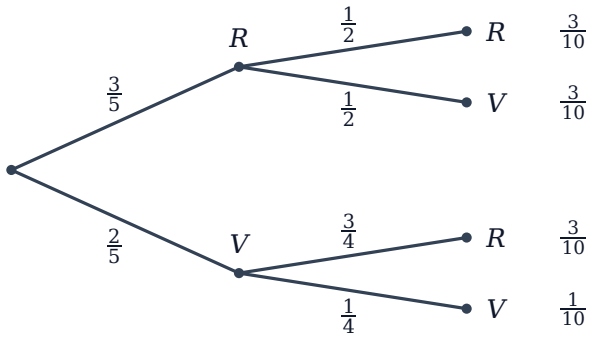
$$E(S) = 7$$

Contrôle. C'est aussi le double de l'espérance d'un dé, $2 \times 3{,}5 = 7$.

Réponse. a) $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{36}$ — b) $E(S) = 7$.

Correction de l'exercice 6 – Nombre de boules rouges

On décrit les deux tirages sans remise par un arbre, puis on lit la valeur de X au bout de chaque chemin.



X compte les boules rouges sur chaque chemin

a) $X = 2$ sur le chemin RR, $X = 0$ sur le chemin VV, $X = 1$ sur les chemins RV et VR :

— $P(X = 2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$;

— $P(X = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$;

— $P(X = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$.

x_i	**0**	**1**	**2**
$P(X = x_i)$	0,1	0,6	0,3

b) $E(X) = 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}6 + 2 \times 0{,}3 = 1{,}2$.

Lecture. En moyenne, on tire 1,2 boule rouge sur deux tirages, soit 60 % des boules tirées : c'est la proportion de rouges dans l'urne.

Réponse. a) $P(X = 0) = 0{,}1$, $P(X = 1) = 0{,}6$, $P(X = 2) = 0{,}3$ — b) $E(X) = 1{,}2$.

Correction de l'exercice 7 – Une roue de loterie

a) Sur 20 secteurs : 2 donnent 50 €, 6 donnent 10 €, 12 ne donnent rien.

g_i	**0**	**10**	**50**
$P(G = g_i)$	0,6	0,3	0,1

b) $E(G) = 0 \times 0{,}6 + 10 \times 0{,}3 + 50 \times 0{,}1 = 3 + 5 = 8$ €.

c) La partie coûte 10 € : le gain net moyen vaut $8 - 10 = -2$ € par partie. Le jeu est **défavorable** au joueur, qui perd en moyenne 2 € par partie (c'est le bénéfice moyen de l'organisateur).

Réponse. b) $E(G) = 8$ € — c) défavorable : -2 € par partie en moyenne.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 8 – Rendre un jeu équitable

On calcule d’abord le gain brut moyen. Le gain vaut 30 € (probabilité 0,15), 5 € (probabilité 0,35) ou 0 € (probabilité 0,5) :

$$E(G) = 30 \times 0{,}15 + 5 \times 0{,}35 + 0 \times 0{,}5 = 4{,}5 + 1{,}75 = 6{,}25 \text{ €}$$

Le jeu est **équitable** quand le gain net moyen est nul, c’est-à-dire quand la mise égale le gain brut moyen : la mise doit être de 6,25 €.

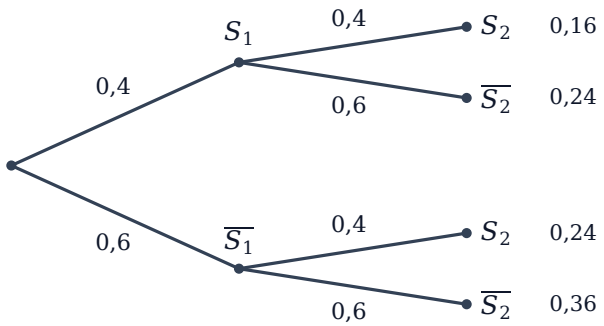
Contrôle. Avec une mise de 6,25 €, le gain net vaut 23,75 ; −1,25 ou −6,25 avec les mêmes probabilités, et

$$23{,}75 \times 0{,}15 - 1{,}25 \times 0{,}35 - 6{,}25 \times 0{,}5 = 3{,}5625 - 0{,}4375 - 3{,}125 = 0$$

Réponse. Une mise de 6,25 €.

Correction de l’exercice 9 – Nombre de succès

On décrit les deux épreuves par un arbre ; les épreuves étant identiques et indépendantes, les branches du second niveau sont les mêmes.



S_i : succès à l'épreuve i

a) On lit X au bout de chaque chemin :

— $X = 2$: chemin $S_1 \to S_2$, probabilité $0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$;
— $X = 0$: chemin $\overline{S_1} \to \overline{S_2}$, probabilité $0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$;
— $X = 1$: deux chemins, $0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}48$.

x_i	**0**	**1**	**2**
$P(X = x_i)$	0,36	0,48	0,16

b) $E(X) = 0 \times 0{,}36 + 1 \times 0{,}48 + 2 \times 0{,}16 = 0{,}48 + 0{,}32 = 0{,}8$.

Lecture. Sur deux épreuves de probabilité de succès 0,4, on obtient en moyenne 0,8 succès, soit $2 \times 0{,}4$.

Réponse. a) 0,36 ; 0,48 ; 0,16 — b) $E(X) = 0{,}8$.

Correction de l’exercice 10 – Gain brut et gain net

a) $E(G) = 0 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}3 + 20 \times 0{,}2 = 1{,}2 + 4 = 5{,}2$ €.

b) On retire la mise de 5 € à chaque valeur ; les probabilités ne changent pas.

n_i	−5	−1	15
$P(N = n_i)$	0,5	0,3	0,2

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$E(N) = (-5) \times 0{,}5 + (-1) \times 0{,}3 + 15 \times 0{,}2 = -2{,}5 - 0{,}3 + 3 = 0{,}2 \text{ €}$$

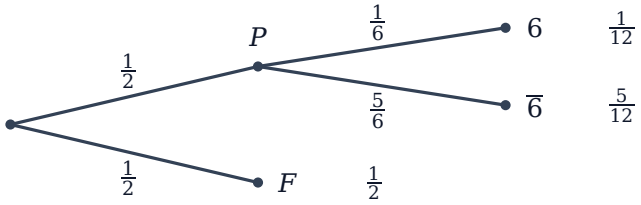
c) $E(G) - 5 = 5{,}2 - 5 = 0{,}2$: on retrouve $E(N)$. Retirer la même mise à tous les gains fait baisser la moyenne d'autant.

Le jeu est (légèrement) **favorable** au joueur : il gagne en moyenne 0,20 € par partie. Mais il perd de l'argent dans 80 % des parties : le gain moyen positif vient des rares gains de 20 €.

Réponse. a) 5,2 € — b) $E(N) = 0{,}2$ € — c) $E(N) = E(G) - 5$; jeu légèrement favorable.

Correction de l'exercice 11 – Une loi lue sur un arbre

a) Premier niveau : la pièce (P ou F, probabilité $\frac{1}{2}$ chacun). Le dé n'est lancé qu'après pile : la branche P se divise en « 6 » ($\frac{1}{6}$) et « pas 6 » ($\frac{5}{6}$).



Pile : on lance le dé ; face : on gagne 1 €

b) On lit le gain au bout de chaque chemin :

— $X = 6$ sur le chemin pile puis 6 : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$;

— $X = 0$ sur le chemin pile puis pas 6 : $\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$;

— $X = 1$ sur le chemin face : $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$.

x_i	**0**	**1**	**6**
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{1}{12}$

Contrôle. $\frac{5+6+1}{12} = 1$.

c) $E(X) = 0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{6}{12} + 6 \times \frac{1}{12} = \frac{6}{12} + \frac{6}{12} = 1$ €.

En moyenne, le jeu rapporte 1 € par partie.

Réponse. b) $P(X = 0) = \frac{5}{12}$, $P(X = 1) = \frac{1}{2}$, $P(X = 6) = \frac{1}{12}$ — c) $E(X) = 1$ €.

Correction de l'exercice 12 – Deux jeux à comparer

a) On calcule les deux espérances :

$$E(A) = 2 \times 0{,}5 + (-1) \times 0{,}5 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 \text{ €}$$

$$E(B) = 100 \times 0{,}02 + (-1) \times 0{,}98 = 2 - 0{,}98 = 1{,}02 \text{ €}$$

b) **En moyenne**, le jeu B rapporte davantage (1,02 € contre 0,50 € par partie) : sur un très grand nombre de parties, c'est le meilleur choix.

Mais le risque est très différent. Au jeu B, on perd dans 98 % des parties ; le gain moyen repose sur un gain rare de 100 €. Sur quelques parties seulement, on a toutes les chances de ne jamais le toucher. Au jeu A, on gagne une partie sur deux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Conclusion. Pour jouer très longtemps : B. Pour jouer quelques parties en limitant les pertes : A.

Réponse. a) $E(A) = 0{,}5$ € et $E(B) = 1{,}02$ € — b) B en moyenne, mais beaucoup plus risqué.

Correction de l'exercice 13 – Repérer une erreur

L'erreur. L'élève a fait la moyenne **simple** des trois gains, comme si chacun avait la même probabilité $\frac{1}{3}$. Or les probabilités sont 0,6 ; 0,3 ; 0,1 : il faut une moyenne **pondérée**.

$$E(X) = 0 \times 0{,}6 + 10 \times 0{,}3 + 50 \times 0{,}1 = 0 + 3 + 5 = 8 \text{ €}$$

Contrôle de vraisemblance. Le gain le plus probable est 0 €, et le gain de 50 € est rare : une moyenne de 20 € était beaucoup trop élevée.

Réponse. $E(X) = 8$ €, et non 20 €.

Correction de l'exercice 14 – Un contrat d'assurance

a) L'assureur encaisse la prime de 350 € dans tous les cas, et paie 8000 € en cas de sinistre.

Situation	sans sinistre	sinistre
x_i (€)	350	$350 - 8000 = -7650$
$P(X = x_i)$	0,97	0,03

b) $E(X) = 350 \times 0{,}97 + (-7650) \times 0{,}03 = 339{,}5 - 229{,}5 = 110$ €.

L'assureur gagne en moyenne 110 € par contrat.

c) Sur 10 000 contrats, le résultat attendu est $10\,000 \times 110 = 1\,100\,000$ €.

Lecture. Sur un seul contrat, l'assureur perd beaucoup dans 3 % des cas ; c'est le grand nombre de contrats qui rend son résultat prévisible.

Réponse. b) $E(X) = 110$ € — c) environ 1 100 000 €.

Correction de l'exercice 15 – Fixer un prix

a) Le coût du risque vaut 600 € avec la probabilité 0,08 et 0 € sinon :

$$E(\text{coût}) = 600 \times 0{,}08 + 0 \times 0{,}92 = 48 \text{ €}$$

b) Pour une marge moyenne de 20 €, le prix doit couvrir le coût moyen et la marge :

$$\text{prix} = 48 + 20 = 68 \text{ €}$$

Vérification. Avec un prix de 68 €, le résultat de l'entreprise vaut 68 € (probabilité 0,92) ou $68 - 600 = -532$ € (probabilité 0,08), d'espérance $62{,}56 - 42{,}56 = 20$ €.

Réponse. a) 48 € — b) 68 €.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : un jeu de fête foraine

a) Sur 25 boules : 1 donne 100 €, 4 donnent 20 €, 10 donnent 5 € et $25 - 1 - 4 - 10 = 10$ ne donnent rien.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

g_i	**0**	**5**	**20**	**100**
$P(G = g_i)$	$\frac{10}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$

b) $E(G) = \dfrac{0 \times 10 + 5 \times 10 + 20 \times 4 + 100 \times 1}{25} = \dfrac{230}{25} = 9{,}2$ €.

c) La partie coûte 12 € : le gain net moyen vaut $9{,}2 - 12 = -2{,}8$ €. Le jeu est **défavorable** au joueur. Il serait équitable avec une mise égale au gain brut moyen, soit 9,20 €.

Réponse. b) $E(G) = 9{,}2$ € — c) défavorable ($-2{,}8$ €) ; mise équitable 9,20 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).