

Plaquette 1 - Tableaux, arbres, loi et espérance

Probabilités et variables aléatoires — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- Cas d'équiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues totales}}$.
- Événement contraire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Réunion et intersection : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Dans un **arbre**, la probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités rencontrées ; la probabilité d'un événement est la **somme** des chemins qui le réalisent.
- Une **variable aléatoire** X associe un nombre à chaque issue. Sa **loi de probabilité** donne les valeurs x_i et les probabilités $p_i = P(X = x_i)$, avec $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.
- **Espérance** (gain moyen attendu sur un grand nombre de répétitions) :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$
- Un jeu est **équitable** si $E(X) = 0$; il est favorable au joueur si $E(X) > 0$.

Correction de l'exercice 1 - Probabilités dans un tableau croisé

Chaque client a la même probabilité d'être choisi : on divise les effectifs par 400.

- a) $P(\text{satisfait}) = \frac{315}{400} = 0,7875$.
- b) $P(\text{abonné et satisfait}) = \frac{210}{400} = 0,525$.
- c) On utilise l'événement contraire : $P(\overline{\text{satisfait}}) = 1 - 0,7875 = 0,2125$.
- Contrôle direct : $\frac{85}{400} = 0,2125$. Cohérent.

Réponse. a) 0,7875 · b) 0,525 · c) 0,2125.

Correction de l'exercice 2 - Réunion de deux événements

- $P(A) = \frac{250}{400} = 0,625$.
- $P(S) = \frac{315}{400} = 0,7875$.
- $P(A \cap S) = \frac{210}{400} = 0,525$ (les clients à la fois abonnés et satisfaits).
- Formule du cours :

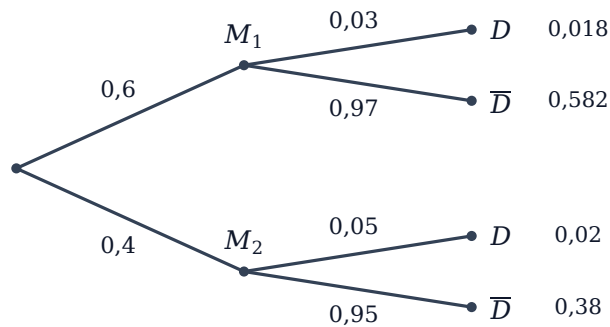
$$P(A \cup S) = P(A) + P(S) - P(A \cap S) = 0,625 + 0,7875 - 0,525 = 0,8875$$
- Contrôle : « abonné **ou** satisfait » exclut seulement les non-abonnés non satisfaits, soit 45 clients. Or $1 - \frac{45}{400} = 1 - 0,1125 = 0,8875$. Cohérent.

Réponse. 0,625 ; 0,7875 ; 0,525 ; $P(A \cup S) = 0,8875$.

Correction de l'exercice 3 – Arbre de probabilités

On construit l'arbre : premier niveau la machine, second niveau l'état de la pièce.

L'arbre (D : « la pièce est défectueuse ») :



Machine puis état de la pièce

a) La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités rencontrées :

$$P(M_1 \text{ et défectueuse}) = 0,60 \times 0,03 = 0,018$$

b) Une pièce défectueuse peut venir de l'une ou l'autre machine : on **additionne** les deux chemins.

- Chemin machine 2 : $0,40 \times 0,05 = 0,020$.
- Total : $P(\text{défectueuse}) = 0,018 + 0,020 = 0,038$, soit 3,8 %.
- Cohérence : le résultat est bien compris entre les deux taux de défaut (3 % et 5 %), plus près de 3 % car la machine 1 produit davantage.

Réponse. a) 0,018 · b) 0,038, soit 3,8 %.

Correction de l'exercice 4 – Loi de probabilité d'une variable aléatoire

On liste les valeurs possibles de X , puis la probabilité de chacune.

- $X = 10$: uniquement pour le 6, donc $P(X = 10) = \frac{1}{6}$.
- $X = 2$: uniquement pour le 5, donc $P(X = 2) = \frac{1}{6}$.
- $X = 0$: pour 1, 2, 3 ou 4, soit 4 issues, donc $P(X = 0) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

x_i	0	2	10
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Contrôle indispensable : $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$. La loi est complète.

Réponse. $P(X = 0) = \frac{2}{3}$, $P(X = 2) = \frac{1}{6}$, $P(X = 10) = \frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 5 – Calculer une espérance

Formule du cours : $E(X) = \sum x_i p_i$.

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{10}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

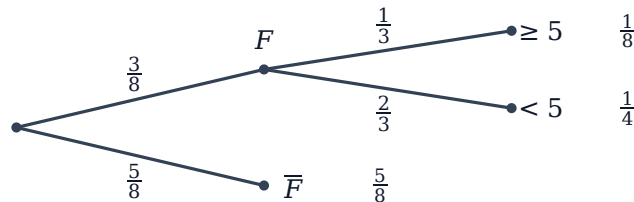
- $E(X) = 2$ € : sur un **grand nombre** de parties, le gain moyen par partie est de 2 €.

- Attention au sens : on ne gagne jamais exactement 2 € sauf en tirant un 5 ; l'espérance est une moyenne à long terme.

Réponse. $E(X) = 2$ € (gain moyen par partie sur un grand nombre de parties).

Correction de l'exercice 6 - Un jeu en deux étapes

a) Il y a $3 \times 4 = 12$ figures sur 32 cartes : $P(F) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$. Le dé n'est lancé qu'après une figure : il donne 5 ou 6 avec la probabilité $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.



F : la carte est une figure ; puis le dé

b) On lit le gain au bout de chaque chemin :

- $X = 5$: figure puis 5 ou 6, $\frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$;
- $X = 1$: figure puis moins de 5, $\frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$;
- $X = 0$: pas de figure, $\frac{5}{8}$.

x_i	0	1	5
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

c) Calcul :

$$E(X) = 0 \times \frac{5}{8} + 1 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{1}{8} = \frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{7}{8} = 0,875 \text{ €}$$

Le gain moyen (0,875 €) est inférieur à la mise (1 €) : le jeu est **défavorable** au joueur, qui perd en moyenne 0,125 € par partie.

Réponse. b) $P(X = 0) = \frac{5}{8}$, $P(X = 1) = \frac{1}{4}$, $P(X = 5) = \frac{1}{8}$ — c) $E(X) = 0,875$ € : défavorable.

Correction de l'exercice 7 - Compléter une loi de probabilité

a) La somme des probabilités vaut 1.

- $0,45 + 0,3 + 0,2 = 0,95$, donc $P(X = 50) = 1 - 0,95 = 0,05$.

b) $E(X) = -5 \times 0,45 + 0 \times 0,3 + 10 \times 0,2 + 50 \times 0,05$.

- $= -2,25 + 0 + 2 + 2,5 = 2,25$.

— L'espérance est positive : en répétant l'expérience, on gagne en moyenne 2,25 par tirage.

Réponse. a) 0,05 · b) $E(X) = 2,25$.

Correction de l'exercice 8 - Espérance d'un jeu payant

a) Les gains nets possibles sont $400 - 5 = 395$, $50 - 5 = 45$, $10 - 5 = 5$ et $0 - 5 = -5$.

- Billets perdants : $500 - 1 - 4 - 10 = 485$.

x_i	-5	5	45	395
$P(X = x_i)$	$\frac{485}{500}$	$\frac{10}{500}$	$\frac{4}{500}$	$\frac{1}{500}$

$$b) E(X) = \frac{-5 \times 485 + 5 \times 10 + 45 \times 4 + 395 \times 1}{500}.$$

— Numérateur : $-2\,425 + 50 + 180 + 395 = -1\,800$.

— Donc $E(X) = \frac{-1\,800}{500} = -3,60$ €.

— **Conclusion** : l'espérance est négative, l'acheteur perd en moyenne 3,60 € par billet.
Le jeu est favorable à l'organisateur (il encaisse 2 500 € et redistribue 700 €).

Réponse. b) $E(X) = -3,60$ € : défavorable au joueur.

Correction de l'exercice 9 - Rendre un jeu équitable

a) Le gain net vaut $12 - p$ avec la probabilité 0,25, et $-p$ avec la probabilité 0,75.

$$E(X) = (12 - p) \times 0,25 + (-p) \times 0,75 = 3 - 0,25p - 0,75p = 3 - p$$

b) Un jeu est **équitable** lorsque $E(X) = 0$:

— $3 - p = 0$ donne $p = 3$ €.

— Interprétation : la mise équitable est exactement l'espérance du lot, $12 \times 0,25 = 3$ €.
Au-delà, le jeu est défavorable au joueur.

Réponse. a) $E(X) = 3 - p$ · b) mise de 3 €.

Correction de l'exercice 10 - Problème : choisir un contrat d'assurance

a) Soit C le coût pour l'assureur. Sa loi est :

c_i	0	500	3 000
$P(C = c_i)$	0,86	0,10	0,04

— Probabilité d'aucun sinistre : $1 - 0,04 - 0,10 = 0,86$.

$$E(C) = 0 \times 0,86 + 500 \times 0,10 + 3\,000 \times 0,04 = 50 + 120 = 170$$

— Le coût moyen par client est donc de 170 € par an.

b) Pour couvrir ce coût et dégager 60 € de marge, la prime doit être

— $170 + 60 = 230$ € par an.

— C'est le principe de l'assurance : la prime est fixée à partir de l'**espérance** du coût, calculée sur un grand nombre de clients.

Réponse. a) $E(C) = 170$ € · b) prime de 230 €.

Correction de l'exercice 11 - Lire un arbre de livraison

a) On suit le chemin $E \rightarrow R$ et l'on **multiplie** les probabilités rencontrées :

$$P(E \cap R) = 0,25 \times 0,04 = 0,01$$

b) Une commande en retard est express ou standard : deux chemins, que l'on **additionne**.

$$P(R) = 0,25 \times 0,04 + 0,75 \times 0,12 = 0,01 + 0,09 = 0,10$$

10 % des commandes sont livrées en retard.

c) $2000 \times 0,01 = 20$ commandes express livrées en retard.

Lecture. La livraison standard est responsable de 0,09 sur 0,10, soit 90 % des retards.

Réponse. a) 0,01 — b) 0,10 — c) 20 commandes.

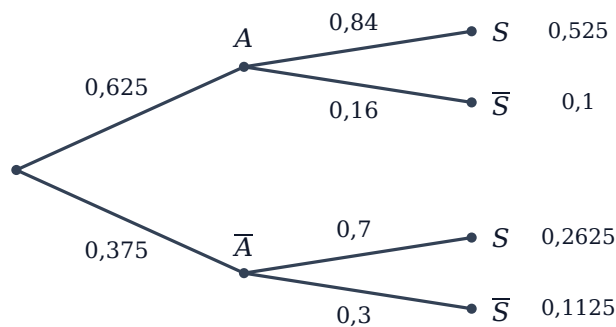
Correction de l'exercice 12 - Du tableau croisé à l'arbre

a) Proportion d'abonnés : $\frac{250}{400} = 0,625$. On divise ensuite par l'effectif de chaque groupe :

— parmi les abonnés : $\frac{210}{250} = 0,84$;

— parmi les non-abonnés : $\frac{105}{150} = 0,7$.

b) Premier niveau : abonné ou non ; second niveau : satisfait ou non, avec les proportions de a).



A : abonné ; S : satisfait

c) Deux chemins mènent à « satisfait » :

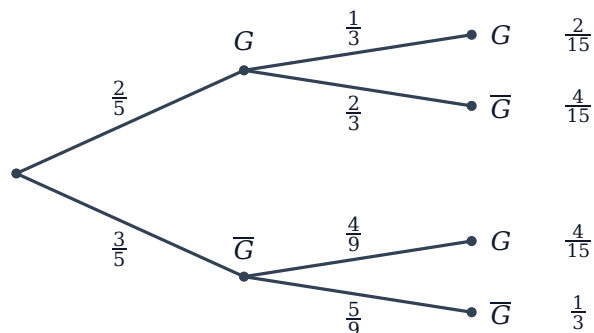
$$P(S) = 0,625 \times 0,84 + 0,375 \times 0,7 = 0,525 + 0,2625 = 0,7875$$

On retrouve $\frac{315}{400} = 0,7875$: l'arbre et le tableau donnent les mêmes résultats.

Réponse. a) 0,625 ; 0,84 ; 0,7 — c) 0,7875.

Correction de l'exercice 13 - Deux jetons sans remise

a) Au premier tirage, $P(G) = \frac{4}{10}$. Sans remise, le second tirage se fait parmi 9 jetons, dont la composition dépend du premier.



G : jeton gagnant (tirages sans remise)

b) Le gain vaut 10 € si les deux jetons sont gagnants, 5 € si un seul l'est, 0 € sinon :

— $P(X = 10) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$;

$$- P(X = 5) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{8}{15};$$

$$- P(X = 0) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}.$$

Contrôle. $\frac{2}{15} + \frac{8}{15} + \frac{5}{15} = 1.$

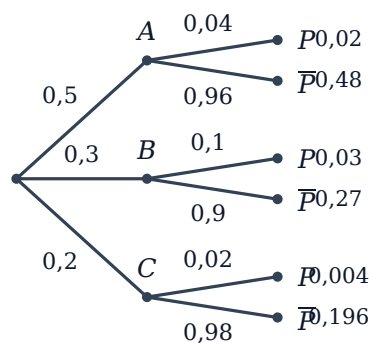
c) Calcul :

$$E(X) = 0 \times \frac{5}{15} + 5 \times \frac{8}{15} + 10 \times \frac{2}{15} = \frac{40 + 20}{15} = 4 \text{ €}$$

Réponse. b) $P(X = 0) = \frac{1}{3}$, $P(X = 5) = \frac{8}{15}$, $P(X = 10) = \frac{2}{15}$ — c) $E(X) = 4 \text{ €}$.

Correction de l'exercice 14 - Trois modèles d'imprimante

a) Le premier niveau a trois branches (de somme $0,5 + 0,3 + 0,2 = 1$) ; le second porte la panne P sachant le modèle.



Modèle d'imprimante puis panne (P)

b) Trois chemins mènent à une panne ; on additionne :

$$P(P) = 0,5 \times 0,04 + 0,3 \times 0,10 + 0,2 \times 0,02 = 0,02 + 0,03 + 0,004 = 0,054$$

c) Le chemin le plus probable vers une panne est celui du modèle **B** (0,03), bien que ce modèle ne représente que 30 % du parc. Sur 500 imprimantes : $500 \times 0,03 = 15$ pannes de modèle B, sur $500 \times 0,054 = 27$ pannes au total.

Réponse. b) 0,054 — c) le modèle B : environ 15 pannes sur 27.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : deux dés et une variable aléatoire

Il y a 36 issues équiprobables.

a) La différence en valeur absolue va de 0 (même résultat) à 5 (entre 1 et 6) : $X \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

b) $X = 0$: les couples (1 ; 1), (2 ; 2), ..., (6 ; 6), soit 6 issues. $P(X = 0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

— $X = 1$: les couples (1 ; 2), (2 ; 1), (2 ; 3), (3 ; 2), (3 ; 4), (4 ; 3), (4 ; 5), (5 ; 4), (5 ; 6), (6 ; 5), soit 10 issues. $P(X = 1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

c) En comptant de la même façon : 8 issues pour $X = 2$, 6 pour $X = 3$, 4 pour $X = 4$, 2 pour $X = 5$.

— Contrôle : $6 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 36$. Toutes les issues sont couvertes.

$$E(X) = \frac{0 \times 6 + 1 \times 10 + 2 \times 8 + 3 \times 6 + 4 \times 4 + 5 \times 2}{36} = \frac{10 + 16 + 18 + 16 + 10}{36} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}$$

— Soit $E(X) \approx 1,94$: en moyenne, les deux dés diffèrent d'un peu moins de 2.

Réponse. a) $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ · b) $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{18}$ · c) $E(X) = \frac{35}{18} \approx 1,94$.