

Plaquette 1 - Tableaux, arbres, loi et espérance

Probabilités et variables aléatoires — Première STMG

Exercices

Méthode

On calcule des probabilités à partir d'un tableau croisé ou d'un arbre, on utilise la réunion et l'événement contraire, puis on définit une **variable aléatoire** : loi de probabilité et espérance. Les deux derniers exercices décident si un jeu ou un contrat est avantageux — l'usage attendu de l'espérance.

Exercice 1 - Probabilités dans un tableau croisé

Une enquête auprès de 400 clients donne :

Effectifs	Satisfaits	Non satisfaits	Total
Abonnés	210	40	250
Non abonnés	105	45	150
Total	315	85	400

On choisit un client au hasard. Calculer la probabilité : a) qu'il soit satisfait ; b) qu'il soit abonné et satisfait ; c) qu'il ne soit pas satisfait.

Exercice 2 - Réunion de deux événements

On reprend le tableau précédent. On note A : « le client est abonné » et S : « le client est satisfait ».

Calculer $P(A)$, $P(S)$, $P(A \cap S)$ puis $P(A \cup S)$.

Exercice 3 - Arbre de probabilités

Une usine possède deux machines. La machine 1 produit 60 % des pièces et 3 % d'entre elles sont défectueuses. La machine 2 produit les 40 % restants, avec 5 % de pièces défectueuses.

On prélève une pièce au hasard.

- Calculer la probabilité qu'elle vienne de la machine 1 et soit défectueuse.
- Calculer la probabilité qu'elle soit défectueuse.

Exercice 4 - Loi de probabilité d'une variable aléatoire

On lance un dé équilibré. Si le résultat est 6, on gagne 10 € ; si c'est 5, on gagne 2 € ; sinon on ne gagne rien. On note X le gain.

Établir la loi de probabilité de X .

Exercice 5 - Calculer une espérance

On reprend la variable X de l'exercice précédent. Calculer $E(X)$ et interpréter.

Exercice 6 - Un jeu en deux étapes

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Si c'est une figure (valet, dame ou roi), on lance un dé : on gagne 5 € si le dé donne 5 ou 6, et 1 € sinon. Si ce n'est pas une figure, on ne gagne rien. On note X le gain.

- Représenter le jeu par un arbre.
- Établir la loi de X .
- Calculer $E(X)$. La partie coûte 1 € : le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 7 - Compléter une loi de probabilité

Une variable aléatoire X a la loi suivante.

x_i	-5	0	10	50
$P(X = x_i)$	0,45	0,3	0,2	?

- Calculer la probabilité manquante.
- Calculer $E(X)$.

Exercice 8 - Espérance d'un jeu payant

Une tombola vend 500 billets à 5 € l'unité. Les lots sont : un lot de 400 €, quatre lots de 50 € et dix lots de 10 €.

On note X le gain **net** d'un acheteur (gain du lot moins le prix du billet).

- Établir la loi de X .
- Calculer $E(X)$ et conclure.

Exercice 9 - Rendre un jeu équitable

Dans un jeu, on gagne 12 € avec la probabilité 0,25 et rien sinon. Le joueur paie p € pour jouer.

- Exprimer l'espérance du gain net en fonction de p .
- Quelle mise rend le jeu équitable ?

Exercice 10 - Problème : choisir un contrat d'assurance

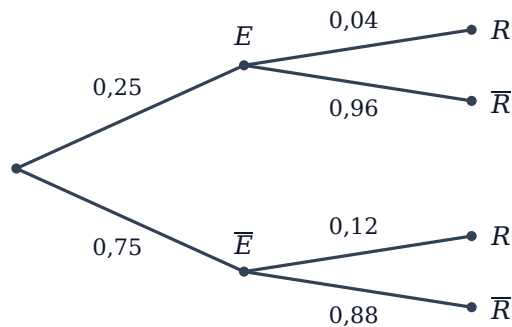
Un assureur estime qu'un client a une probabilité de 0,04 de déclarer un sinistre coûtant 3 000 € et une probabilité de 0,10 de déclarer un sinistre coûtant 500 €. Sinon, aucun coût.

- Calculer le coût moyen attendu pour l'assureur.
- Quelle prime annuelle doit-il facturer pour couvrir ce coût moyen et dégager 60 € de marge ?

Exercice 11 - Lire un arbre de livraison

L'arbre ci-dessous décrit les livraisons d'un site de vente : la commande est en livraison express (E) ou standard ($\bar{E}$), puis livrée en retard (R) ou non.

- Calculer la probabilité qu'une commande soit en express **et** livrée en retard.
- Calculer la probabilité qu'une commande soit livrée en retard.
- Sur 2000 commandes, combien de commandes express livrées en retard peut-on prévoir ?



E : livraison express ; R : livraison en retard

Exercice 12 - Du tableau croisé à l'arbre

On reprend l'enquête de l'exercice 1 (400 clients ; 250 abonnés dont 210 satisfaits ; 150 non-abonnés dont 105 satisfaits).

- Calculer la proportion d'abonnés, puis la proportion de satisfaits **parmi les abonnés** et **parmi les non-abonnés**.
- Construire l'arbre pondéré correspondant.
- Retrouver, à l'aide de l'arbre, la probabilité qu'un client soit satisfait.

Exercice 13 - Deux jetons sans remise

Une urne contient 4 jetons gagnants, qui rapportent 5 € chacun, et 6 jetons perdants. On tire successivement deux jetons **sans remise**. On note X le gain total.

- Représenter l'expérience par un arbre.
- Établir la loi de X .
- Calculer $E(X)$.

Exercice 14 - Trois modèles d'imprimante

Un service informatique gère trois modèles d'imprimante : 50 % de modèle A, 30 % de modèle B et 20 % de modèle C. Dans l'année, une imprimante tombe en panne avec la probabilité 0,04 (modèle A), 0,10 (modèle B) ou 0,02 (modèle C).

- Construire l'arbre pondéré.
- Calculer la probabilité qu'une imprimante tombe en panne dans l'année.
- Quel modèle fournit le plus de pannes ? Sur un parc de 500 imprimantes, combien de pannes de ce modèle prévoir ?

Exercice 15 - Synthèse : deux dés et une variable aléatoire

On lance deux dés équilibrés et on note X la valeur absolue de la différence des deux résultats.

- a) Quelles valeurs peut prendre X ?
- b) Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.
- c) Vérifier que $E(X) = \frac{35}{18}$.