MATHÉMATIQUES

Probabilités et variables aléatoires

Première STMG

Probabilité conditionnelle • Tableau croisé • Arbre pondéré • Indépendance
Probabilités totales • Variable
aléatoire • Espérance • Loi de Bernoulli • Simulation

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques du tronc commun de la voie technologique, classe de première** (arrêté du 26 février 2026, BO du 2 avril 2026, rentrée 2026), partie « Statistiques et probabilités », sections « Probabilités conditionnelles : indépendance » et « Variables aléatoires », ainsi que les automatismes de probabilités. Il couvre :

- probabilités conditionnelles dans un tableau croisé ou un arbre ; distinguer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$;
- indépendance de deux événements ; formule des probabilités totales dans des cas simples ;
- variable aléatoire discrète, loi, notations $\{X = a\}$ et $\{X \leq a\}$, espérance ;
- loi de Bernoulli de paramètre p ;
- simulation de N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli et interprétation de la distance à p des fréquences observées.

La répétition de $n \leq 4$ épreuves de Bernoulli fait l'objet du chapitre suivant.

Objectif : calculer des probabilités conditionnelles, reconnaître l'indépendance, utiliser la formule des probabilités totales, calculer l'espérance d'une variable aléatoire et interpréter la fluctuation d'échantillons simulés.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Probabilités conditionnelles **3**

2 Indépendance et probabilités totales **3**

3 Variables aléatoires **4**

4 Loi de Bernoulli **4**

5 Simuler des échantillons **5**

6 Erreurs classiques **5**

7 Fiche de synthèse **5**

8 Exercices d'application **5**

9 Corrigés des exercices **6**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Probabilités conditionnelles

Probabilité de B sachant A

Pour $P(A) \neq 0$: $\boxed{P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$, et donc $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. Dans un tirage au hasard dans une population, $P_A(B)$ est la proportion d'individus de B **parmi** ceux de A.

Clients d'une agence

Une agence de voyages a 400 clients :

	Séjour France (F)	Étranger	Total
Réservation en ligne (L)	120	100	220
En agence	60	120	180
Total	180	220	400

On choisit un client au hasard : $P(L \cap F) = \frac{120}{400} = 0{,}3$; $P_L(F) = \frac{120}{220} \approx 0{,}545$; $P_F(L) = \frac{120}{180} \approx 0{,}667$. Ce sont trois nombres différents.

Arbre pondéré

Premier niveau : $P(A)$, $P(\overline{A})$; second niveau : probabilités conditionnelles ; chemin : produit ; plusieurs chemins : somme.

2. Indépendance et probabilités totales

Indépendance

Pour $P(A) \neq 0$, l'événement B est **indépendant** de A si $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B. Cela équivaut à $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$, et la relation est symétrique.

Tester l'indépendance

Dans l'agence : $P(L) = \frac{220}{400} = 0{,}55$ et $P_F(L) \approx 0{,}667$. Comme $P_F(L) \neq P(L)$, les événements F et L ne sont pas indépendants : les clients qui partent en France réservent plus souvent en ligne.

Formule des probabilités totales

Si A et $\overline{A}$ partagent l'univers : $\boxed{P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Retours de colis

60 % des colis d'un site partent par transporteur A, les autres par B ; 5 % des colis de A et 12 % de ceux de B arrivent en retard. Alors $P(R) = 0{,}6 \times 0{,}05 + 0{,}4 \times 0{,}12 = 0{,}03 + 0{,}048 = 0{,}078$. Un colis est en retard : il vient de A avec la probabilité $\frac{0{,}03}{0{,}078} \approx 0{,}385$.

3. Variables aléatoires

Variable aléatoire et loi

Une **variable aléatoire** X associe un nombre à chaque issue d'une expérience aléatoire (un gain, un nombre de défauts…). Sa **loi** donne les valeurs x_i possibles et les probabilités $P(X = x_i)$, de somme 1.

Espérance

$$\boxed{E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \cdots + x_k P(X = x_k)}$$

C'est la valeur moyenne de X que l'on peut attendre sur un grand nombre de répétitions.

Un jeu de grattage

Un ticket coûte 6 € ; il fait gagner 0 €, 5 €, 10 € ou 50 € avec les probabilités 0,5 ; 0,3 ; 0,15 ; 0,05. Le gain net X (gain moins mise) prend les valeurs -6, -1, 4, 44.

x_i	-6	-1	4	44
$P(X = x_i)$	0,5	0,3	0,15	0,05

$E(X) = -3 - 0{,}3 + 0{,}6 + 2{,}2 = -0{,}5$: en moyenne, un joueur perd 0,50 € par ticket ; le jeu est favorable à l'organisateur. $P(X \geq 4) = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2$: un ticket sur cinq rapporte plus qu'il ne coûte.

Jeu équitable

Un jeu est **équitable** quand l'espérance du gain net est nulle.

4. Loi de Bernoulli

Loi de Bernoulli de paramètre p

Une expérience à deux issues, « succès » de probabilité p et « échec », est une épreuve de Bernoulli. La variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p : $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$, et

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p.$$

Un client pris au hasard a la carte de fidélité avec la probabilité 0,62 : la variable « 1 s'il a la carte, 0 sinon » suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,62, d'espérance 0,62.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

5. Simuler des échantillons

Simuler une loi de Bernoulli

Avec Python, `1 if random() < p else 0` renvoie 1 avec la probabilité p ; au tableur, `=SI(ALEA()<p;1;0)`. Un échantillon de taille n est formé de n tirages ; on calcule la **fréquence des 1**.

500 échantillons de taille 100, $p = 0{,}3$

On a simulé $N = 500$ échantillons. Les fréquences des 1 vont de 0,12 à 0,45, avec une moyenne de 0,300 et un écart type $s \approx 0{,}048$. Parmi elles :

- 65 % environ sont à une distance au plus s de p ;
- 96 % environ à une distance au plus $2s$;
- 99 % environ à une distance au plus $3s$.

Une fréquence observée à plus de $2s$ de p (par exemple 0,42 alors que $p = 0{,}3$) est donc une situation **rare** dans ce modèle : elle peut faire douter de la valeur $p = 0{,}3$, sans le prouver.

6. Erreurs classiques

À éviter

- Confondre $P_A(B)$, $P_B(A)$ et $P(A \cap B)$.
- Confondre indépendants et incompatibles.
- Oublier la mise dans le calcul d'un gain net.
- Conclure qu'un modèle est faux à partir d'une seule fréquence un peu éloignée de p.

7. Fiche de synthèse

Conditionnelle	$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$; tableau : case / marge de A
Indépendance	$P_A(B) = P(B) \iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$
Probabilités totales	$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$
Espérance	$E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$; jeu équitable : $E = 0$
Bernoulli	$P(X = 1) = p$; $E(X) = p$
Simulation	fréquences des 1 : environ 95 % à moins de $2s$ de p

8. Exercices d'application

Exercice 1 – Tableau croisé

Avec le tableau de l'agence (section 1), calculer $P_{\overline{L}}(F)$ et comparer avec $P_L(F)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – Indépendance

$P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}25$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 3 – Espérance

Une assurance encaisse 200 € par contrat. Elle rembourse 1 000 € avec la probabilité 0,08, 3 000 € avec la probabilité 0,02, et rien sinon. Calculer l'espérance du bénéfice par contrat.

Exercice 4 – Probabilités totales

70 % des appels d'un service client arrivent le matin. 10 % des appels du matin et 25 % de ceux de l'après-midi aboutissent à une réclamation. Calculer la probabilité qu'un appel aboutisse à une réclamation.

9. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. Parmi les 180 clients en agence, 60 partent en France : $P_{\overline{L}}(F) = \dfrac{60}{180} = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}333$, contre $P_L(F) \approx 0{,}545$ en ligne.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1 = P(A \cap B)$: oui, A et B sont indépendants.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. Bénéfice X : 200 (probabilité 0,9), -800 (0,08), $-2\,800$ (0,02). $E(X) = 180 - 64 - 56 = 60$ € par contrat.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $P(R) = 0{,}7 \times 0{,}1 + 0{,}3 \times 0{,}25 = 0{,}07 + 0{,}075 = 0{,}145$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).