

Plaquette 4 – Au moins un, au plus un : passer par le contraire

Répétition d'épreuves indépendantes — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Événement contraire. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Les contraires à connaître pour n épreuves :

Événement	Contraire
au moins un succès	aucun succès
au plus un succès	au moins deux succès
tous des succès	au moins un échec

$$P(\text{au moins un succès}) = 1 - (1 - p)^n$$

Fiabilité d'un système (composants indépendants, chacun en état de marche avec la probabilité f) :

Montage	Le système marche si	Probabilité
en série	tous les composants marchent	f^n
en parallèle (secours)	au moins un composant marche	$1 - (1 - f)^n$

⚠ « Au moins un échec » n'est pas « au moins un succès » : bien identifier ce que l'on appelle succès.

Correction de l'exercice 1 – Au moins un gagnant

Chaque ticket est une épreuve de Bernoulli de succès « gagnant », $p = 0,2$.

« Au moins un gagnant » regroupe sept des huit chemins. Son contraire, « aucun gagnant », n'en compte qu'un :

$$P(\text{aucun gagnant}) = 0,8^3 = 0,512$$

$$P(\text{au moins un gagnant}) = 1 - 0,512 = 0,488$$

Malgré trois tickets, on a moins d'une chance sur deux de gagner au moins une fois. Additionner $0,2 + 0,2 + 0,2 = 0,6$ serait faux : cela compterait plusieurs fois les cas où plusieurs tickets gagnent.

Réponse. 0,488.

Correction de l'exercice 2 – Au plus un retard

« Au plus un retard » signifie « aucun » ou « exactement un ».

Aucun retard : $0,7^3 = 0,343$.

Exactement un retard : 3 chemins, chacun de probabilité $0,3 \times 0,7^2 = 0,147$, soit $3 \times 0,147 = 0,441$.

$$P(\text{au plus un}) = 0,343 + 0,441 = 0,784$$

On peut le retrouver par le contraire, « au moins deux retards » :

$$3 \times 0,3^2 \times 0,7 + 0,3^3 = 0,189 + 0,027 = 0,216, \text{ et } 1 - 0,216 = 0,784.$$

Réponse. 0,784.

Correction de l'exercice 3 - Associer chaque événement à son contraire

Le contraire d'un événement est formé de **toutes** les autres issues. On raisonne sur le nombre de succès, qui vaut 0, 1, 2 ou 3.

- a) Au moins un succès : 1, 2 ou 3. Le contraire est 0 : « aucun succès ».
- b) Au plus un succès : 0 ou 1. Le contraire est 2 ou 3 : « au moins deux succès ».
- c) Trois succès : le contraire est 0, 1 ou 2 succès, c'est-à-dire « au moins un échec ».
- d) Au plus deux succès : 0, 1 ou 2. Le contraire est « trois succès ».

On retrouve que c) et d) sont contraires l'un de l'autre : $P(\text{au plus deux}) = 1 - p^3$.

Réponse. a) aucun succès — b) au moins deux succès — c) au moins un échec — d) trois succès.

Correction de l'exercice 4 - Combien de tentatives ?

a) Par le contraire, $P(\text{au moins un succès}) = 1 - 0,5^n$:

- $n = 1$: $1 - 0,5 = 0,5$;
- $n = 2$: $1 - 0,25 = 0,75$;
- $n = 3$: $1 - 0,125 = 0,875$;
- $n = 4$: $1 - 0,0625 = 0,9375$.

b) La probabilité augmente avec n . Elle vaut $0,875 < 0,9$ pour trois répétitions et $0,9375 > 0,9$ pour quatre : il faut au minimum 4 répétitions.

Chaque répétition divise par deux la probabilité de n'avoir aucun succès.

Réponse. a) 0,5 ; 0,75 ; 0,875 ; 0,9375 — b) 4 répétitions.

Correction de l'exercice 5 - Au moins deux faces

« Au moins deux faces » regroupe 2, 3 ou 4 faces, soit $6 + 4 + 1 = 11$ chemins. Le contraire, « au plus une face », n'en regroupe que $1 + 4 = 5$: on le calcule.

Chaque chemin a pour probabilité $0,5^4 = 0,0625$.

$$P(\text{au plus une face}) = 5 \times 0,0625 = 0,3125$$

$$P(\text{au moins deux faces}) = 1 - 0,3125 = 0,6875$$

Contrôle direct : $11 \times 0,0625 = 0,6875$.

Réponse. 0,6875.

Correction de l'exercice 6 - Deux détecteurs valent mieux qu'un

L'alerte n'échoue que si **tous** les détecteurs sont en panne. Chaque détecteur est en panne avec la probabilité $1 - 0,9 = 0,1$, indépendamment.

a) Avec deux détecteurs :

$$P(\text{alerte}) = 1 - 0,1^2 = 1 - 0,01 = 0,99$$

Avec trois détecteurs : $1 - 0,1^3 = 1 - 0,001 = 0,999$.

b) Un seul détecteur échoue une fois sur dix ; deux détecteurs, une fois sur cent ; trois, une fois sur mille. Doubler un équipement de sécurité (le monter « en parallèle ») réduit

fortement le risque, à condition que les pannes soient vraiment indépendantes (pas une coupure de courant commune, par exemple).

Réponse. a) 0,99 et 0,999 — b) chaque détecteur ajouté divise le risque d'échec par 10.

Correction de l'exercice 7 - Une sauvegarde sur deux disques

Succès : « le disque tombe en panne », $p = 0,05$, pour chacun des deux disques.

a) Perte des données : les deux disques en panne, un seul chemin.

$$P(\text{perte}) = 0,05^2 = 0,0025$$

soit 0,25 %, contre 5 % avec un seul disque.

b) « Au moins un disque en panne » est le contraire de « aucun disque en panne » :

$$1 - 0,95^2 = 1 - 0,9025 = 0,0975$$

Une panne de disque arrive donc presque une année sur dix, mais elle n'entraîne une perte de données qu'une fois sur quatre cents : c'est tout l'intérêt de la double sauvegarde.

Réponse. a) 0,0025 — b) 0,0975.

Correction de l'exercice 8 - Machines en série, machines en parallèle

a) En série, la chaîne fonctionne si **toutes** les machines fonctionnent : un seul chemin.

$$P(\text{série}) = 0,95^3 = 0,857375 \approx 0,857$$

b) En parallèle, l'atelier fonctionne si **au moins une** machine fonctionne. Le contraire est « les trois sont en panne », de probabilité $0,05^3 = 0,000125$:

$$P(\text{parallèle}) = 1 - 0,05^3 = 0,999875$$

Avec les mêmes machines, la chaîne en série s'arrête environ un jour sur sept, l'atelier en parallèle presque jamais. Plus une chaîne compte de machines indispensables, plus elle est fragile.

Réponse. a) environ 0,857 — b) 0,999875.

Correction de l'exercice 9 - Repérer une erreur de contraire

L'erreur. L'élève a retranché la probabilité que les **trois pièces soient défectueuses** ($0,1^3$). Or le contraire de « au moins une défectueuse » est « **aucune** défectueuse », c'est-à-dire trois pièces conformes.

La correction.

$$P(\text{au moins une défectueuse}) = 1 - 0,9^3 = 1 - 0,729 = 0,271$$

Contrôle de vraisemblance. Avec 10 % de défauts, trouver au moins une pièce défectueuse sur trois ne peut pas être presque certain : 0,999 était absurde, 0,271 est plausible.

Réponse. $1 - 0,9^3 = 0,271$.

Correction de l'exercice 10 - Un sondage auprès de quatre personnes

Succès : « favorable », $p = 0,55$, échec 0,45.

a) Par le contraire :

$$P(\text{au moins un favorable}) = 1 - 0,45^4 \approx 1 - 0,041 = 0,959$$

b) Au moins trois favorables : trois (4 chemins) ou quatre (1 chemin).

$$4 \times 0,55^3 \times 0,45 + 0,55^4 \approx 0,2995 + 0,0915 = 0,391$$

Alors qu'une majorité de la ville est favorable, une majorité des quatre personnes interrogées ne l'est qu'environ quatre fois sur dix : un échantillon de quatre personnes est beaucoup trop petit pour juger l'opinion d'une ville.

Réponse. a) environ 0,959 — b) environ 0,391.

Correction de l'exercice 11 - Un faux positif

Succès : « résultat faussement positif », $p = 0,02$, échec 0,98.

« Au moins un faux positif » a pour contraire « trois résultats négatifs » :

$$P(\text{au moins un faux positif}) = 1 - 0,98^3 \approx 1 - 0,9412 = 0,0588$$

Arrondi au millième : environ 0,059.

En multipliant les tests, on augmente le risque d'avoir au moins une fausse alerte : près de 6 % pour trois tests, contre 2 % pour un seul. C'est pourquoi un résultat positif isolé est en général vérifié par un autre examen.

Réponse. environ 0,059.

Correction de l'exercice 12 - Pile au moins une fois

On perd seulement si les quatre lancers donnent face : un seul chemin sur seize.

$$P(\text{perdre}) = 0,5^4 = \frac{1}{16} = 0,0625$$

$$P(\text{gagner}) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375$$

Le jeu est très favorable au joueur. Si l'organisateur veut un jeu plus équilibré, il doit réduire le nombre de lancers : avec un seul lancer, la probabilité de gagner ne vaut plus que 0,5.

Réponse. gagner : $\frac{15}{16} = 0,9375$; perdre : 0,0625.

Correction de l'exercice 13 - Au moins une acceptation

Succès : « le client accepte », $p = 0,15$, échec 0,85.

a) Aucune acceptation : un seul chemin, quatre échecs.

$$P(\text{aucune}) = 0,85^4 \approx 0,5220$$

b) Par le contraire :

$$P(\text{au moins une}) \approx 1 - 0,5220 = 0,4780$$

Moins d'une fois sur deux, l'offre envoyée à quatre clients trouve preneur. Pour dépasser une chance sur deux, il faudrait envoyer l'offre à davantage de clients ou la rendre plus attractive.

Réponse. a) environ 0,5220 — b) environ 0,4780.

Correction de l'exercice 14 - Tous satisfaits ?

Succès : « client satisfait », $p = 0,9$; échec « mécontent », 0,1.

a) $P(\text{trois satisfaits}) = 0,9^3 = 0,729$.

b) « Au moins un mécontent » est le contraire de « trois satisfaits » :

$$1 - 0,729 = 0,271$$

c) Au moins deux mécontents : deux mécontents (3 chemins de probabilité $0,1^2 \times 0,9 = 0,009$) ou trois ($0,1^3 = 0,001$) :

$$3 \times 0,009 + 0,001 = 0,028$$

Un taux de satisfaction de 90 % laisse plus d'une semaine sur quatre avec au moins un client mécontent.

Réponse. a) 0,729 — b) 0,271 — c) 0,028.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un serveur de secours

Le site n'est inaccessible que si **tous** les serveurs sont indisponibles. Chacun l'est avec la probabilité 0,2. Avec n serveurs :

$$P(\text{accessible}) = 1 - 0,2^n$$

a) $n = 1$: 0,8 ; $n = 2$: $1 - 0,04 = 0,96$; $n = 3$: $1 - 0,008 = 0,992$; $n = 4$: $1 - 0,0016 = 0,9984$.

b) Il faut $1 - 0,2^n \geq 0,99$. Avec deux serveurs, on n'obtient que 96 % ; avec trois, 99,2 %, ce qui suffit. Il faut donc trois serveurs au total, c'est-à-dire deux serveurs de secours.

Un quatrième serveur n'apporterait que 0,64 point de disponibilité en plus : il faut alors comparer ce gain à son coût.

Réponse. a) 0,8 ; 0,96 ; 0,992 ; 0,9984 — b) trois serveurs.