

Plaquette 1 - Épreuves de Bernoulli et arbres à deux épreuves

Répétition d'épreuves indépendantes — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Épreuve de Bernoulli. Expérience aléatoire à deux issues : le **succès** S , de probabilité p , et l'**échec** $\bar{S}$, de probabilité $1 - p$.

Épreuves identiques et indépendantes. On répète la même épreuve, et le résultat de l'une ne modifie pas les probabilités de l'autre (tirages **avec remise**, clients différents qui décident indépendamment...). Sur l'arbre, toutes les branches « succès » portent p .

Règles de l'arbre.

Situation	Opération
suivre un chemin	multiplier les probabilités
réunir plusieurs chemins	additionner leurs probabilités

$$P(SS) = p \times p = p^2 \quad P(\text{exactement un succès}) = p(1 - p) + (1 - p)p = 2p(1 - p)$$

Contrôle. La somme des probabilités de tous les chemins vaut 1.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître une épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli a **exactement deux issues** : succès ou échec.

a) **Oui** : succès « obtenir 6 », de probabilité $p = \frac{1}{6}$; échec « ne pas obtenir 6 », de probabilité $\frac{5}{6}$.

b) **Non** telle quelle : il y a six issues possibles. On peut cependant la transformer en épreuve de Bernoulli en choisissant un succès, comme en a).

c) **Oui** : succès « le client achète », $p = 0,3$, échec de probabilité $1 - 0,3 = 0,7$.

d) **Oui** : succès « tirer un cœur ». Il y a 8 cœurs sur 32 cartes :

$$p = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0,25$$

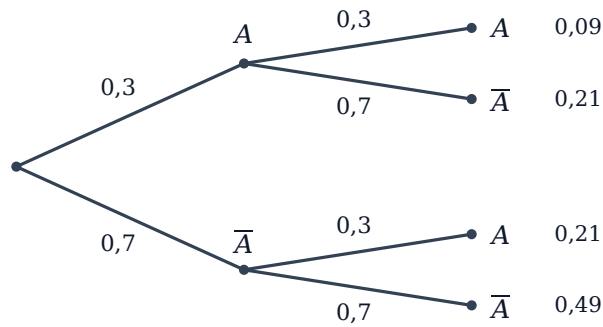
Le choix du succès dépend de la question posée ; il n'a pas besoin d'être une bonne nouvelle.

Réponse. a) oui, $p = \frac{1}{6}$ — b) non (six issues) — c) oui, $p = 0,3$ — d) oui, $p = 0,25$.

Correction de l'exercice 2 - Deux clients

a) Chaque client est une épreuve de Bernoulli de succès A (« le client achète »), avec

$P(A) = 0,3$ et $P(\bar{A}) = 0,7$. Les deux clients décident indépendamment l'un de l'autre : au second niveau, les branches portent les mêmes probabilités.



A : le client achète

b) On multiplie le long de chaque chemin :

$$P(AA) = 0,3 \times 0,3 = 0,09 \quad P(A\bar{A}) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$$

$$P(\bar{A}A) = 0,7 \times 0,3 = 0,21 \text{ et } P(\bar{A}\bar{A}) = 0,7 \times 0,7 = 0,49.$$

Contrôle : $0,09 + 0,21 + 0,21 + 0,49 = 1$.

Réponse. 0,09 ; 0,21 ; 0,21 ; 0,49.

Correction de l'exercice 3 - Exactement un achat

a) Exactement un achat peut se produire de deux façons : le premier achète et pas le second ($A\bar{A}$), ou l'inverse ($\bar{A}A$).

b) Ces deux chemins ont la même probabilité, $0,3 \times 0,7 = 0,21$. On les additionne :

$$P(\text{exactement un achat}) = 0,21 + 0,21 = 0,42$$

c) Aucun achat correspond au seul chemin $\bar{A}\bar{A}$: $0,7^2 = 0,49$.

« Au moins un client achète » est l'événement contraire de « aucun client n'achète » : $1 - 0,49 = 0,51$. On vérifie : $0,42 + 0,09 = 0,51$ (un achat ou deux achats).

Réponse. a) $A\bar{A}$ et $\bar{A}A$ — b) 0,42 — c) 0,49 et 0,51.

Correction de l'exercice 4 - Deux lancers d'une pièce

Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de succès F , avec $p = 0,5$. Les deux lancers sont identiques et indépendants.

a) Les quatre issues sont FF , $F\bar{F}$, $\bar{F}F$ et $\bar{F}\bar{F}$. Chacune a pour probabilité

$$0,5 \times 0,5 = 0,25$$

b) Exactement une fois face : les chemins $F\bar{F}$ et $\bar{F}F$, soit $0,25 + 0,25 = 0,5$.

On remarque qu'obtenir une fois face est deux fois plus probable qu'obtenir deux fois face : il y a deux chemins pour le premier événement, un seul pour le second.

Réponse. a) quatre issues de probabilité 0,25 — b) 0,5.

Correction de l'exercice 5 - Deux tirages avec remise

a) Chaque tirage a deux issues (rouge ou non) et la probabilité d'une rouge est

$p = \frac{3}{10} = 0,3$. La boule est remise : l'urne est la même au second tirage, la probabilité ne change pas. Les deux épreuves sont identiques et indépendantes.

b) Deux rouges : un seul chemin, $0,3 \times 0,3 = 0,09$.

Une seule rouge : deux chemins (R puis non R , ou l'inverse), chacun de probabilité $0,3 \times 0,7 = 0,21$:

$$P(\text{une seule rouge}) = 2 \times 0,21 = 0,42$$

Sans remise, l'urne changerait après le premier tirage : les épreuves ne seraient plus identiques ni indépendantes.

Réponse. b) 0,09 et 0,42.

Correction de l'exercice 6 - Avec ou sans remise ?

a) Avec remise, chaque tirage donne une rouge avec la probabilité $\frac{2}{5} = 0,4$, et les tirages sont indépendants :

$$P(RR) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$$

b) Sans remise, après une première rouge, il reste 1 rouge sur 4 boules. La probabilité de la seconde rouge devient $\frac{1}{4}$:

$$P(RR) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = 0,1$$

c) Seul le tirage **avec remise** est une répétition d'épreuves identiques et indépendantes : la composition de l'urne ne change pas. Sans remise, la seconde épreuve dépend du résultat de la première.

Réponse. a) 0,16 — b) 0,1 — c) avec remise seulement.

Correction de l'exercice 7 - Deux appels de prospection

Chaque appel est une épreuve de Bernoulli de succès « rendez-vous obtenu », avec $p = 0,4$ et $1 - p = 0,6$.

a) Deux succès : un seul chemin, $0,4 \times 0,4 = 0,16$.

b) Deux échecs : $0,6 \times 0,6 = 0,36$.

c) « Au moins un rendez-vous » est le contraire de « aucun rendez-vous » :

$$P(\text{au moins un}) = 1 - P(\text{aucun}) = 1 - 0,36 = 0,64$$

Le commercial a près de deux chances sur trois d'obtenir au moins un rendez-vous en deux appels.

Réponse. a) 0,16 — b) 0,36 — c) 0,64.

Correction de l'exercice 8 - Compléter un arbre

a) La branche « échec » issue du même nœud porte $1 - 0,15 = 0,85$, car la somme des branches issues d'un nœud vaut 1. Les épreuves étant identiques et indépendantes, le second niveau reprend les mêmes probabilités : 0,15 pour le succès, 0,85 pour l'échec, à partir de chacun des deux nœuds.

b) On multiplie le long des chemins :

$$P(SS) = 0,15^2 = 0,0225 \quad P(\overline{S}\overline{S}) = 0,85^2 = 0,7225$$

Les deux chemins mixtes valent chacun $0,15 \times 0,85 = 0,1275$. Contrôle : $0,0225 + 2 \times 0,1275 + 0,7225 = 1$.

Réponse. a) succès 0,15, échec 0,85 partout — b) 0,0225 et 0,7225.

Correction de l'exercice 9 – Au moins un six en deux lancers

Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de succès « obtenir 6 », de probabilité $\frac{1}{6}$; l'échec a pour probabilité $\frac{5}{6}$.

« Au moins un 6 » regroupe trois chemins (6 puis 6, 6 puis autre, autre puis 6). Il est plus rapide de passer par l'événement contraire, « aucun 6 », qui ne correspond qu'à un chemin :

$$P(\text{aucun 6}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

$$P(\text{au moins un 6}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \approx 0,306$$

Contrôle par les trois chemins : $\frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$.

Réponse. $\frac{11}{36} \approx 0,306$.

Correction de l'exercice 10 – Deux colis livrés à temps

Chaque envoi est une épreuve de Bernoulli de succès « livré à temps », de probabilité 0,95 ; le retard a pour probabilité 0,05.

a) $P(\text{deux à temps}) = 0,95^2 = 0,9025$.

b) « Au moins un retard » est le contraire de « deux à temps » :

$$1 - 0,9025 = 0,0975$$

c) Exactement un retard : deux chemins de probabilité $0,95 \times 0,05 = 0,0475$, soit $2 \times 0,0475 = 0,095$.

La différence avec b), $0,0975 - 0,095 = 0,0025$, est la probabilité que les deux colis soient en retard : $0,05^2 = 0,0025$.

Réponse. a) 0,9025 — b) 0,0975 — c) 0,095.

Correction de l'exercice 11 – Retrouver la probabilité d'un succès

Deux succès correspondent à un seul chemin, de probabilité $p \times p = p^2$:

$$p^2 = 0,36$$

Une probabilité est positive, donc $p = 0,6$ (car $0,6 \times 0,6 = 0,36$).

La probabilité d'un échec est $1 - 0,6 = 0,4$, et celle de deux échecs est $0,4^2 = 0,16$.

Contrôle : les chemins mixtes valent $0,6 \times 0,4 = 0,24$ chacun, et $0,36 + 0,24 + 0,24 + 0,16 = 1$.

Réponse. $p = 0,6$; deux échecs : 0,16.

Correction de l'exercice 12 – Repérer une erreur

L'erreur. L'élève a **additionné** les probabilités des deux achats. Or « le premier achète et le second achète » est un chemin de l'arbre : on **multiplie** le long d'un chemin.

$$P(AA) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$$

Pourquoi 0,6 est impossible. Deux achats sont plus rares qu'un seul : la probabilité que les deux achètent ne peut pas dépasser 0,3, la probabilité que le premier achète. Avec dix clients, l'addition donnerait même 3, ce qui n'a aucun sens pour une probabilité.

On additionne seulement des chemins **différents** qui mènent au même événement.

Réponse. $0,3 \times 0,3 = 0,09$, et non $0,6$.

Correction de l'exercice 13 - Un jeu en deux lancers

a) Le succès « obtenir 5 ou 6 » correspond à 2 faces sur 6 : $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. L'échec a pour probabilité $\frac{2}{3}$.

b) Le joueur perd seulement s'il échoue aux deux lancers, ce qui correspond à un seul chemin :

$$P(\text{perdre}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P(\text{gagner}) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \approx 0,556$$

Le jeu est légèrement favorable au joueur : il gagne un peu plus d'une fois sur deux.

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ — b) $\frac{5}{9} \approx 0,556$.

Correction de l'exercice 14 - Nombre de bons de réduction utilisés

a) X peut valoir 0, 1 ou 2. Avec $p = 0,25$ et $1 - p = 0,75$:

- $P(X = 0) = 0,75^2 = 0,5625$;
- $P(X = 1) = 2 \times 0,25 \times 0,75 = 0,375$ (deux chemins) ;
- $P(X = 2) = 0,25^2 = 0,0625$.

Contrôle : $0,5625 + 0,375 + 0,0625 = 1$.

b) On applique la définition de l'espérance :

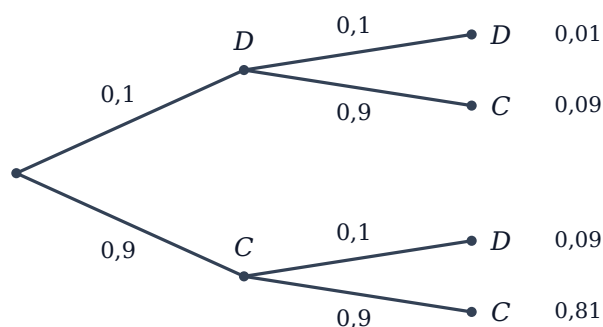
$$E(X) = 0 \times 0,5625 + 1 \times 0,375 + 2 \times 0,0625 = 0,5$$

En moyenne, sur un grand nombre de paires de clients, un demi-bon est utilisé par paire. On retrouve $2 \times 0,25$: deux clients qui utilisent chacun leur bon une fois sur quatre.

Réponse. a) $0,5625$; $0,375$; $0,0625$ — b) $E(X) = 0,5$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : deux contrôles qualité

a) Chaque prélèvement est une épreuve de Bernoulli de succès D (« pièce défectueuse »), avec $P(D) = 0,1$ et $P(C) = 0,9$.



D : pièce défectueuse, C : conforme

b) Deux pièces conformes : chemin CC , de probabilité $0,9 \times 0,9 = 0,81$.

c) Le lot est refusé dans tous les cas sauf CC :

$$P(\text{refus}) = 1 - 0,81 = 0,19$$

Près d'un lot sur cinq serait refusé, alors que 90 % des pièces sont bonnes : un contrôle sur deux pièces est sévère. C'est un point à discuter avec le service qualité.

Réponse. b) 0,81 — c) 0,19.