

Plaquette 5 - Problèmes de gestion

Répétition d'épreuves indépendantes — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

La démarche.

1. Préciser le **succès** et sa probabilité p , puis le nombre n de répétitions ($n \leq 4$). 2. Vérifier que les épreuves sont **identiques** (même p) et **indépendantes**. 3. Calculer avec l'arbre : un chemin à k succès a pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$.

n	Chemins à 0, 1, 2, ... succès
2	1 ; 2 ; 1
3	1 ; 3 ; 3 ; 1
4	1 ; 4 ; 6 ; 4 ; 1

4. « Au moins un » : par le contraire, $1 - (1-p)^n$. 5. Pour décider, calculer l'**espérance** d'un gain ou d'un coût à partir de sa loi :

$$E(G) = g_1 \times P(G = g_1) + g_2 \times P(G = g_2) + \dots$$

Contrôle. La somme des probabilités de la loi vaut 1.

Correction de l'exercice 1 - Une offre envoyée à quatre clients

a) Succès : « le client accepte », $p = 0,15$, $n = 4$. Avec 1, 4, 6, 4, 1 chemins :

$$P(X = 0) = 0,85^4 \approx 0,5220 ; P(X = 1) = 4 \times 0,15 \times 0,85^3 \approx 0,3685 ;$$

$$P(X = 2) = 6 \times 0,15^2 \times 0,85^2 \approx 0,0975 ; P(X = 3) \approx 0,0115 ; P(X = 4) \approx 0,0005.$$

b) L'envoi coûte $4 \times 5 = 20$ € dans tous les cas, donc $B = 50X - 20$. B vaut -20, 30, 80, 130 ou 180 € avec les probabilités ci-dessus.

c) On applique la définition de l'espérance :

$$E(B) \approx -20 \times 0,5220 + 30 \times 0,3685 + 80 \times 0,0975 + 130 \times 0,0115 + 180 \times 0,0005 \approx 10$$

L'opération rapporte en moyenne environ 10 € : elle est rentable en moyenne, alors qu'elle fait perdre 20 € dans plus d'un cas sur deux.

Réponse. a) 0,5220 ; 0,3685 ; 0,0975 ; 0,0115 ; 0,0005 — b) $B = 50X - 20$ — c) $E(B) \approx 10$ €.

Correction de l'exercice 2 - Surréservation dans un petit hôtel

Succès : « le client se présente », $p = 0,8$, $n = 4$.

a) Surréservation : les quatre clients se présentent, un seul chemin.

$$P(\text{surréservation}) = 0,8^4 = 0,4096$$

b) Au moins une chambre reste vide si au plus deux clients viennent.

$$P(0) = 0,2^4 = 0,0016, P(1) = 4 \times 0,8 \times 0,2^3 = 0,0256 \text{ et } P(2) = 6 \times 0,8^2 \times 0,2^2 = 0,1536, \text{ d'où}$$

$$P(\text{au moins une chambre vide}) = 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 = 0,1808$$

c) L'hôtel est en surréservation environ deux nuits sur cinq : il devra alors reloger un

client, ce qui coûte cher et nuit à sa réputation. Avec un taux de présence de 80 %, accepter une réservation de plus que de chambres est trop risqué.

Réponse. a) 0,4096 — b) 0,1808 — c) stratégie trop risquée.

Correction de l'exercice 3 - Un concours en trois épreuves

Succès : « épreuve réussie », $p = 0,7$, $n = 3$.

a) Admis : deux réussites (3 chemins) ou trois (1 chemin).

$$P(\text{admis}) = 3 \times 0,7^2 \times 0,3 + 0,7^3 = 0,441 + 0,343 = 0,784$$

b) Trois réussites : $0,7^3 = 0,343$.

Le candidat est admis dans plus de trois cas sur quatre, mais ne réussit tout que dans un tiers des cas : la règle « au moins deux sur trois » lui laisse le droit à un échec.

Réponse. a) 0,784 — b) 0,343.

Correction de l'exercice 4 - Le pari du chevalier de Méré

Succès : « obtenir 6 », $p = \frac{1}{6}$, répété $n = 4$ fois de façon indépendante. On passe par le contraire, « aucun 6 » :

$$P(\text{aucun 6}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \approx 0,482$$

$$P(\text{au moins un 6}) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0,518$$

La probabilité de gagner dépasse 0,5 : le pari était légèrement favorable au chevalier. Sur un grand nombre de paris, il gagnait un peu plus souvent qu'il ne perdait, ce qui explique qu'il ait pu en vivre.

Réponse. Oui : $P \approx 0,518 > 0,5$.

Correction de l'exercice 5 - Quatre machines et un risque d'arrêt

Succès : « la machine tombe en panne », $p = 0,05$, $n = 4$.

« Au moins deux pannes » a pour contraire « au plus une panne », qui ne compte que $1 + 4 = 5$ chemins :

$$P(\text{au plus une}) = 0,95^4 + 4 \times 0,05 \times 0,95^3 \approx 0,8145 + 0,1715 = 0,9860$$

$$P(\text{arrêt}) = 1 - P(\text{au plus une}) \approx 0,014$$

La production s'arrête environ 1,4 jour sur cent, soit à peu près trois jours par an pour 250 jours ouvrés.

Réponse. environ 0,014.

Correction de l'exercice 6 - Quatre avis clients

Succès : « avis positif », $p = 0,8$, $n = 4$.

a) Un seul chemin : $0,8^4 = 0,4096$.

b) On calcule toute la loi du nombre X d'avis positifs :

$$P(X = 3) = 4 \times 0,8^3 \times 0,2 = 0,4096 \quad P(X = 2) = 6 \times 0,64 \times 0,04 = 0,1536$$

$P(X = 1) = 0,0256$ et $P(X = 0) = 0,0016$. Les valeurs 3 et 4 sont également les plus probables, avec 0,4096 chacune.

c) $E(X) = 1 \times 0,0256 + 2 \times 0,1536 + 3 \times 0,4096 + 4 \times 0,4096 = 3,2$, soit $4 \times 0,8$: en moyenne 3,2 avis positifs sur quatre.

Réponse. a) 0,4096 — b) 3 et 4 — c) 3,2.

Correction de l'exercice 7 - Le coût des sinistres d'une flotte

a) Succès : « le véhicule a un sinistre », $p = 0,1$, $n = 3$. C vaut 0, 2 000, 4 000 ou 6 000 € :

$$P(C = 0) = 0,9^3 = 0,729 ; P(C = 2\,000) = 3 \times 0,1 \times 0,81 = 0,243 ;$$

$$P(C = 4\,000) = 3 \times 0,01 \times 0,9 = 0,027 ; P(C = 6\,000) = 0,001.$$

b) On applique la définition de l'espérance :

$$E(C) = 2\,000 \times 0,243 + 4\,000 \times 0,027 + 6\,000 \times 0,001 = 486 + 108 + 6 = 600$$

En moyenne, la flotte coûte 600 € de sinistres par an. L'assureur doit demander au moins 600 € par an, plus ses frais de gestion et sa marge, pour ne pas perdre d'argent en moyenne sur un grand nombre de contrats.

Réponse. a) 0,729 ; 0,243 ; 0,027 ; 0,001 — b) $E(C) = 600$ € : prime d'au moins 600 €.

Correction de l'exercice 8 - Des pénalités de retard

Succès : « commande en retard », $p = 0,1$, $n = 3$. La pénalité vaut 0, 10, 20 ou 30 €, avec les probabilités 0,729 ; 0,243 ; 0,027 ; 0,001.

$$E(\text{pénalité}) = 10 \times 0,243 + 20 \times 0,027 + 30 \times 0,001 = 2,43 + 0,54 + 0,03 = 3$$

La pénalité moyenne est de 3 € pour trois commandes, soit 1 € par commande.

Aucune pénalité : aucun retard, $0,9^3 = 0,729$. Le transporteur ne paie rien dans environ trois cas sur quatre.

Réponse. 3 € en moyenne ; aucune pénalité avec la probabilité 0,729.

Correction de l'exercice 9 - Trois tickets de loterie

a) Les mises coûtent $3 \times 2 = 6$ €. Avec k tickets gagnants, $G = 10k - 6$, soit -6, 4, 14 ou 24 €, avec les probabilités 0,729 ; 0,243 ; 0,027 ; 0,001 (succès « ticket gagnant », $p = 0,1$, $n = 3$).

b) On applique la définition de l'espérance :

$$E(G) = -6 \times 0,729 + 4 \times 0,243 + 14 \times 0,027 + 24 \times 0,001$$

$$E(G) = -4,374 + 0,972 + 0,378 + 0,024 = -3 \text{ €}.$$

Le jeu est **défavorable** : on perd en moyenne 3 € pour 6 € misés, c'est-à-dire la moitié de la mise. Les 27,1 % de chances d'avoir au moins un ticket gagnant ne compensent pas les mises.

Réponse. a) -6 ; 4 ; 14 ; 24 avec 0,729 ; 0,243 ; 0,027 ; 0,001 — b) $E(G) = -3$ € : jeu défavorable.

Correction de l'exercice 10 - Simuler trois épreuves en Python

a) `random()` renvoie un nombre au hasard entre 0 et 1 ; le test `random() < p` est vrai avec la probabilité p . La boucle répète trois fois cette épreuve de Bernoulli et compte les succès : la fonction renvoie le **nombre de succès** sur trois épreuves indépendantes de paramètre 0,2, un entier entre 0 et 3.

b) La fréquence observée de la valeur 0 est

$$\frac{5\,140}{10\,000} = 0,514$$

La probabilité théorique d'aucun succès est $0,8^3 = 0,512$. La fréquence est très proche de la probabilité : sur un grand nombre de simulations, la fréquence fluctue peu autour de la probabilité.

Réponse. a) le nombre de succès sur trois épreuves — b) 0,514, proche de 0,512.

Correction de l'exercice 11 - Combien d'appels pour un rendez-vous ?

Avec n appels, la probabilité d'obtenir au moins un rendez-vous est, par le contraire :

$$P = 1 - 0,65^n$$

- $n = 1$: 0,35 ;
- $n = 2$: $1 - 0,4225 = 0,5775$;
- $n = 3$: $1 - 0,274625 \approx 0,7254$;
- $n = 4$: $1 - 0,17850625 \approx 0,8215$.

La probabilité dépasse 0,8 à partir de 4 appels : il lui faut quatre appels. Trois appels ne donnent qu'environ 72,5 % de chances.

Réponse. 4 appels ($P \approx 0,82$).

Correction de l'exercice 12 - Deux fournisseurs

La livraison est acceptée si les trois pièces sont conformes : un seul chemin.

a) Fournisseur A : $P(\text{acceptée}) = 0,95^3 \approx 0,857$.

Fournisseur B : $P(\text{acceptée}) = 0,9^3 = 0,729$.

b) Le fournisseur B a deux fois plus de défauts, mais ses livraisons sont acceptées dans près de trois cas sur quatre. Le contrôle sur trois pièces sanctionne davantage B (refus dans 27 % des cas contre 14 % pour A), sans toutefois écarter clairement le moins bon fournisseur : il faudrait contrôler plus de pièces pour bien les distinguer.

Réponse. a) A : environ 0,857 ; B : 0,729 — b) contrôle peu discriminant.

Correction de l'exercice 13 - Des épreuves qui ne sont pas identiques

L'erreur. Les deux épreuves sont indépendantes mais **pas identiques** : elles n'ont pas la même probabilité de succès. On ne peut pas les remplacer par deux épreuves de paramètre 0,4. Sur l'arbre, les branches du second niveau portent 0,5 et non 0,3.

Le calcul. « Aucune vente » : le premier échoue (0,7) et le second échoue (0,5) :

$$P(\text{aucune vente}) = 0,7 \times 0,5 = 0,35 \quad P(\text{au moins une}) = 1 - 0,35 = 0,65$$

Avec la moyenne 0,4, l'élève aurait trouvé $1 - 0,6^2 = 0,64$: un résultat proche ici, mais faux en général.

Réponse. Épreuves non identiques ; $P(\text{au moins une vente}) = 0,65$.

Correction de l'exercice 14 - Repérer une erreur

L'erreur. La formule $0,3^3$ suppose trois épreuves **identiques et indépendantes**. Sans remise, la composition de l'urne change après chaque tirage : ce n'est pas une répétition d'épreuves indépendantes.

La correction. On suit l'arbre en mettant à jour l'urne : $\frac{3}{10}$ pour la première gagnante, puis $\frac{2}{9}$ (il reste 2 gagnantes sur 9 boules), puis $\frac{1}{8}$:

$$P(\text{trois gagnantes}) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{6}{720} = \frac{1}{120} \approx 0,008$$

Avec remise, 0,027 aurait été juste.

Réponse. Sans remise : $\frac{1}{120} \approx 0,008$, et non 0,027.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une campagne d'appels

a) Succès : « vente », $p = 0,25$, $n = 4$, avec 1, 4, 6, 4, 1 chemins :

$$P(X = 0) = 0,75^4 \approx 0,3164 ; P(X = 1) = 4 \times 0,25 \times 0,75^3 \approx 0,4219 ;$$

$$P(X = 2) = 6 \times 0,25^2 \times 0,75^2 \approx 0,2109 ; P(X = 3) \approx 0,0469 ; P(X = 4) \approx 0,0039.$$

b) Les appels coûtent $4 \times 3 = 12$ €, donc $B = 40X - 12$, qui vaut $-12, 28, 68, 108$ ou 148 €.

$$E(B) \approx -12 \times 0,3164 + 28 \times 0,4219 + 68 \times 0,2109 + 108 \times 0,0469 + 148 \times 0,0039 \approx 28$$

c) La campagne fait perdre de l'argent seulement si aucune vente n'est conclue : $P(X = 0) \approx 0,316$. Le vendeur perd 12 € environ une fois sur trois, mais gagne en moyenne 28 € par campagne : l'opération est rentable sur la durée.

Réponse. a) 0,3164 ; 0,4219 ; 0,2109 ; 0,0469 ; 0,0039 — b) $E(B) \approx 28$ € — c) environ 0,316.