

Plaquette 3 – Quatre épreuves et comptage des chemins

Répétition d'épreuves indépendantes — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Quatre épreuves identiques et indépendantes, de succès S de probabilité p :
 $2^4 = 16$ chemins.

Nombre de chemins selon le nombre de succès (on les liste en plaçant les succès) :

Succès	0	1	2	3	4
Chemins	1	4	6	4	1

Les 6 chemins à deux succès : $SSEE, SESE, SEES, ESSE, ESES, EESS$.

Probabilité de k succès :

$$P(k \text{ succès}) = (\text{nombre de chemins}) \times p^k(1-p)^{4-k}$$

Contrôle. $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ chemins, et les cinq probabilités ont pour somme 1.

Au moins un succès : $1 - (1-p)^4$, par l'événement contraire.

Correction de l'exercice 1 – Combien de chemins ?

a) Chaque épreuve a deux issues, et chacune double le nombre de chemins :

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$$

L'arbre complet a 16 chemins, trop pour être dessiné lisiblement : on raisonne en listant les issues.

b) Exactement un succès : le succès est au premier, au deuxième, au troisième ou au quatrième rang. Il y a donc 4 chemins :

$SEEE, ESEE, EESE, EEES$.

Par le même raisonnement, il y a aussi 4 chemins avec exactement un échec, c'est-à-dire trois succès.

Réponse. a) 16 — b) 4 chemins : $SEEE, ESEE, EESE, EEES$.

Correction de l'exercice 2 – Les chemins à deux succès

On place les deux succès parmi les quatre rangs. Le premier succès peut être au rang 1, 2 ou 3, le second plus loin :

- premier succès au rang 1 : $SSEE, SESE, SEES$;
- premier succès au rang 2 : $ESSE, ESES$;
- premier succès au rang 3 : $EESS$.

Soit 6 chemins.

On récapitule le nombre de chemins pour 0, 1, 2, 3 et 4 succès :

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

On retrouve bien les 16 chemins de l'arbre : aucun n'a été oublié ni compté deux fois.

Réponse. 6 chemins ; $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$.

Correction de l'exercice 3 - Quatre lancers d'une pièce

Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de succès « face », $p = 0,5$. Tous les chemins ont la même probabilité :

$$0,5^4 = \frac{1}{16} = 0,0625$$

On multiplie par le nombre de chemins :

- 0 face : $1 \times 0,0625 = 0,0625$;
- 1 face : $4 \times 0,0625 = 0,25$;
- 2 faces : $6 \times 0,0625 = 0,375$;
- 3 faces : 0,25 ; 4 faces : 0,0625.

Le résultat le plus probable est « deux faces », mais il ne se produit que dans 37,5 % des cas.

Réponse. 0,0625 ; 0,25 ; 0,375 ; 0,25 ; 0,0625.

Correction de l'exercice 4 - Quatre clients

Succès : « le client achète », $p = 0,3$, échec 0,7. On applique

$$P(X = k) = (\text{nombre de chemins}) \times 0,3^k \times 0,7^{4-k}$$

- $P(X = 0) = 0,7^4 = 0,2401$;
- $P(X = 1) = 4 \times 0,3 \times 0,343 = 0,4116$;
- $P(X = 2) = 6 \times 0,09 \times 0,49 = 0,2646$;
- $P(X = 3) = 4 \times 0,027 \times 0,7 = 0,0756$;
- $P(X = 4) = 0,3^4 = 0,0081$.

Contrôle : $0,2401 + 0,4116 + 0,2646 + 0,0756 + 0,0081 = 1$.

Réponse. 0,2401 ; 0,4116 ; 0,2646 ; 0,0756 ; 0,0081.

Correction de l'exercice 5 - Quatre pièces contrôlées

Succès : « la pièce est défectueuse », $p = 0,05$; échec 0,95.

a) Aucune défectueuse : un seul chemin, quatre échecs.

$$P(\text{aucune}) = 0,95^4 \approx 0,8145$$

b) « Au moins une défectueuse » est l'événement contraire :

$$P(\text{au moins une}) = 1 - 0,95^4 \approx 0,1855$$

Même avec 5 % de défauts seulement, un contrôle de quatre pièces détecte au moins un défaut dans près d'un cas sur cinq. Passer par le contraire évite d'additionner quatre probabilités (une, deux, trois ou quatre défectueuses).

Réponse. a) environ 0,8145 — b) environ 0,1855.

Correction de l'exercice 6 - Au moins trois victoires

« Au moins trois » signifie trois ou quatre victoires.

Trois victoires : 4 chemins (la défaite peut être à l'un des quatre matchs), chacun de probabilité $0,6^3 \times 0,4 = 0,0864$:

$$P(3) = 4 \times 0,0864 = 0,3456$$

Quatre victoires : $0,6^4 = 0,1296$.

$$P(\text{au moins trois}) = 0,3456 + 0,1296 = 0,4752$$

L'équipe gagne au moins trois matchs sur quatre dans environ 47,5 % des cas.

Réponse. 0,4752.

Correction de l'exercice 7 - Une série de tirs au but

Chaque tir est une épreuve de Bernoulli de succès « tir réussi », $p = 0,75$.

a) Quatre réussites : un seul chemin.

$$P(\text{quatre réussites}) = 0,75^4 \approx 0,3164$$

b) « Au moins un tir manqué » est le contraire de « quatre réussites » :

$$1 - 0,75^4 \approx 0,6836$$

Un joueur qui réussit trois tirs sur quatre en moyenne a donc environ deux chances sur trois de manquer au moins un tir sur une série de quatre.

Réponse. a) environ 0,3164 — b) environ 0,6836.

Correction de l'exercice 8 - Deux stratégies de prospection

Dans les deux cas, on passe par l'événement contraire « aucun devis accepté ».

Quatre devis à 0,2 :

$$P(\text{au moins un}) = 1 - 0,8^4 = 1 - 0,4096 = 0,5904$$

Deux devis à 0,4 :

$$P(\text{au moins un}) = 1 - 0,6^2 = 1 - 0,36 = 0,64$$

La seconde stratégie est plus efficace (64 % contre environ 59 %) tout en demandant moins de devis. Multiplier les tentatives ne compense pas entièrement une probabilité de succès plus faible.

Réponse. Deux devis à 0,4 : 0,64 contre 0,5904.

Correction de l'exercice 9 - Le nombre de succès le plus probable

On multiplie le nombre de chemins par la probabilité d'un chemin :

$$P(0) = 0,8^4 = 0,4096 \quad P(1) = 4 \times 0,2 \times 0,8^3 = 4 \times 0,1024 = 0,4096$$

$$P(2) = 6 \times 0,04 \times 0,64 = 0,1536, \text{ puis } P(3) = 0,0256 \text{ et } P(4) = 0,0016.$$

Les valeurs 0 et 1 sont également les plus probables, avec 0,4096 chacune. C'est une coïncidence de ces nombres : le chemin à 0 succès est plus probable que chaque chemin à 1 succès, mais il y a quatre chemins à 1 succès.

Réponse. 0,4096 ; 0,4096 ; 0,1536 : 0 et 1 succès sont les plus probables.

Correction de l'exercice 10 - Espérance du nombre d'acheteurs

On applique la définition de l'espérance :

$$E(X) = 0 \times 0,2401 + 1 \times 0,4116 + 2 \times 0,2646 + 3 \times 0,0756 + 4 \times 0,0081$$

$$E(X) = 0,4116 + 0,5292 + 0,2268 + 0,0324 = 1,2.$$

Vérification : quatre clients qui achètent chacun avec la probabilité 0,3 donnent en moyenne $4 \times 0,3 = 1,2$ acheteur.

Interprétation : sur un grand nombre de groupes de quatre clients, la boutique compte en moyenne 1,2 acheteur par groupe.

Réponse. $E(X) = 1,2 = 4 \times 0,3$.

Correction de l'exercice 11 - Au plus un défaut

« Au plus une » signifie « aucune » ou « exactement une ».

Aucune défectueuse : $0,9^4 = 0,6561$.

Exactement une : 4 chemins, chacun de probabilité $0,1 \times 0,9^3 = 0,0729$:

$$4 \times 0,0729 = 0,2916$$

$$P(\text{au plus une}) = 0,6561 + 0,2916 = 0,9477$$

Dans près de 95 % des contrôles, on trouve au plus une pièce défectueuse sur quatre.

Réponse. 0,9477.

Correction de l'exercice 12 - Repérer une erreur de comptage

L'erreur. Il y a non pas 4 mais 6 chemins à deux faces : *FFPP*, *FPFP*, *FPPF*, *PFFP*, *PFPP*, *PPFF*. L'élève a confondu avec le nombre de chemins à une face.

La correction.

$$P(\text{deux faces}) = 6 \times 0,0625 = 0,375$$

Contrôle par la somme. Avec 4 chemins, les probabilités de 0 à 4 faces auraient pour somme $0,0625 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,0625 = 0,875$, et non 1 : il manquait bien des chemins.

Réponse. 6 chemins : 0,375.

Correction de l'exercice 13 - Quatre questions au hasard

Succès : « réponse juste », $p = 0,25$, échec 0,75.

a) Par le contraire : $P(\text{aucune juste}) = 0,75^4 \approx 0,3164$, donc

$$P(\text{au moins une}) \approx 1 - 0,3164 = 0,6836$$

b) Trois justes : 4 chemins de probabilité $0,25^3 \times 0,75 \approx 0,0117$, soit $4 \times 0,25^3 \times 0,75 = 0,046875$. Quatre justes : $0,25^4 \approx 0,0039$.

$$P(\text{admis}) = 0,046875 + 0,00390625 \approx 0,051$$

Répondre au hasard donne environ 5 % de chances d'être admis : le questionnaire filtre bien les réponses données au hasard.

Réponse. a) environ 0,684 — b) environ 0,051.

Correction de l'exercice 14 - Quatre colis

Succès : « le colis est en retard », $p = 0,25$, échec 0,75.

a) $P(\text{aucun retard}) = 0,75^4 \approx 0,3164$.

b) Par le contraire :

$$P(\text{au moins un retard}) = 1 - 0,75^4 \approx 0,6836$$

c) Exactement deux retards : 6 chemins, chacun de probabilité

$$0,25^2 \times 0,75^2 = 0,0625 \times 0,5625 = 0,03515625 :$$

$$6 \times 0,03515625 = 0,2109375 \approx 0,211$$

Le client a plus de deux chances sur trois de subir au moins un retard : un taux de retard de 25 % par colis est très pénalisant pour une commande en plusieurs colis.

Réponse. a) environ 0,316 — b) environ 0,684 — c) environ 0,211.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une règle d'acceptation

On calcule $P(\text{au plus une}) = P(0) + P(1)$, avec 4 chemins pour une défectueuse.

a) Avec $p = 0,1$:

$$0,9^4 + 4 \times 0,1 \times 0,9^3 = 0,6561 + 0,2916 = 0,9477$$

b) Avec $p = 0,2$:

$$0,8^4 + 4 \times 0,2 \times 0,8^3 = 0,4096 + 0,4096 = 0,8192$$

c) Un lot à 10 % de défauts est accepté dans près de 95 % des cas, et un lot deux fois plus mauvais l'est encore dans plus de 80 % des cas. Avec seulement quatre pièces contrôlées, la règle distingue mal un bon lot d'un mauvais. Pour être plus exigeant, il faudrait contrôler davantage de pièces ou n'accepter aucun défaut.

Réponse. a) 0,9477 — b) 0,8192 — c) règle peu sélective.