

Plaquette 2 - Trois épreuves : l'arbre complet

Répétition d'épreuves indépendantes — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Trois épreuves identiques et indépendantes, de succès S de probabilité p : l'arbre a $2 \times 2 \times 2 = 8$ chemins.

Probabilité d'un chemin. On multiplie : un chemin avec k succès et $3 - k$ échecs a pour probabilité $p^k(1 - p)^{3-k}$, quel que soit l'ordre.

Nombre de chemins selon le nombre de succès.

Nombre de succès	0	1	2	3
Nombre de chemins	1	3	3	1

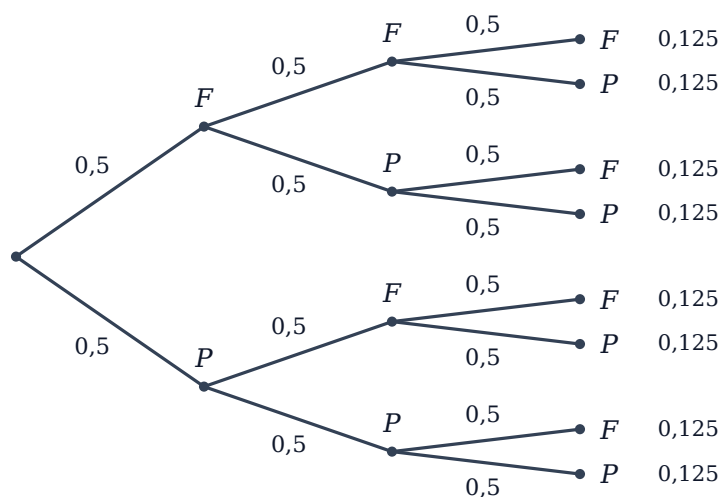
$$P(\text{exactement 2 succès}) = 3 \times p^2(1 - p)$$

Contrôle. Les quatre probabilités (0, 1, 2 ou 3 succès) ont pour somme 1.

△ « $SS\bar{S}$ » (un ordre précis) n'est qu'un des chemins à deux succès.

Correction de l'exercice 1 - Trois lancers d'une pièce

a) Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de succès « face » (F), de probabilité 0,5. Les lancers sont identiques et indépendants : chaque niveau de l'arbre porte les mêmes probabilités.



F : face, P : pile

b) Chaque lancer double le nombre de chemins : il y a $2 \times 2 \times 2 = 8$ issues (FFF , FFP , FPF , FPP , PFF , PFP , PPF , PPP). Chacune a pour probabilité

$$0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 0,125$$

Contrôle : $8 \times 0,125 = 1$.

Réponse. b) 8 issues, chacune de probabilité 0,125.

Correction de l'exercice 2 - Exactement deux faces

Les issues avec exactement deux faces sont FFP , FPF et PFF : le pile peut être au premier, au deuxième ou au troisième lancer. Chacune a pour probabilité 0,125 :

$$P(\text{exactement deux faces}) = 3 \times 0,125 = 0,375$$

« Au moins deux faces » regroupe « exactement deux » et « trois faces » (FFF , probabilité 0,125) :

$$P(\text{au moins deux faces}) = 0,375 + 0,125 = 0,5$$

C'est cohérent avec la symétrie de la pièce : « au moins deux faces » et « au moins deux piles » ont la même probabilité, et l'un des deux se produit forcément.

Réponse. 0,375 et 0,5.

Correction de l'exercice 3 - Trois clients

Chaque client est une épreuve de Bernoulli de succès « achète », avec $p = 0,2$ et $1 - p = 0,8$. On regroupe les chemins de l'arbre selon le nombre d'acheteurs.

- $X = 0$: un chemin, $0,8^3 = 0,512$.
- $X = 1$: trois chemins (l'acheteur est le premier, le deuxième ou le troisième), chacun de probabilité $0,2 \times 0,8^2 = 0,128$, d'où $3 \times 0,128 = 0,384$.
- $X = 2$: trois chemins de probabilité $0,2^2 \times 0,8 = 0,032$, d'où 0,096.
- $X = 3$: un chemin, $0,2^3 = 0,008$.

$$0,512 + 0,384 + 0,096 + 0,008 = 1$$

Le plus probable est qu'aucun des trois clients n'achète.

Réponse. $P(X = 0) = 0,512$; $P(X = 1) = 0,384$; $P(X = 2) = 0,096$; $P(X = 3) = 0,008$.

Correction de l'exercice 4 - Contrôle de trois pièces

Succès : « la pièce est défectueuse », avec $p = 0,1$ et $1 - p = 0,9$. Un chemin à k défectueuses a pour probabilité $0,1^k \times 0,9^{3-k}$, et il y a 1, 3, 3 ou 1 chemins selon que k vaut 0, 1, 2 ou 3.

$$P(0) = 0,9^3 = 0,729 \quad P(1) = 3 \times 0,1 \times 0,81 = 0,243$$

$$P(2) = 3 \times 0,01 \times 0,9 = 0,027 \text{ et } P(3) = 0,1^3 = 0,001.$$

Contrôle : $0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1$. Dans près de trois contrôles sur quatre, aucune pièce défectueuse n'est trouvée, alors que 10 % de la production est défectueuse.

Réponse. 0,729 ; 0,243 ; 0,027 ; 0,001.

Correction de l'exercice 5 - L'ordre compte-t-il ?

a) C'est un seul chemin de l'arbre :

$$P(SS\bar{S}) = 0,2 \times 0,2 \times 0,8 = 0,032$$

b) Exactement deux succès correspond à trois chemins : $SS\bar{S}$, $S\bar{S}S$ et $\bar{S}SS$. Ils ont tous la même probabilité, 0,032, car on multiplie les mêmes nombres dans un autre ordre :

$$P(\text{exactement deux succès}) = 3 \times 0,032 = 0,096$$

c) La première question impose l'**ordre** des résultats, la seconde ne regarde que leur **nombre**. Il faut toujours lire l'énoncé avec soin pour savoir combien de chemins sont concernés.

Réponse. a) 0,032 — b) 0,096 — c) un ordre imposé correspond à un seul des trois chemins.

Correction de l'exercice 6 - Répondre au hasard à un QCM

Chaque question est une épreuve de Bernoulli de succès « réponse juste », de probabilité $p = \frac{1}{4} = 0,25$; les réponses au hasard sont indépendantes.

a) Un seul chemin :

$$P(\text{trois justes}) = 0,25^3 = \frac{1}{64} \approx 0,016$$

b) $P(\text{aucune juste}) = 0,75^3 = \frac{27}{64} \approx 0,422$.

c) C'est l'événement contraire de b) :

$$1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} \approx 0,578$$

Répondre au hasard donne plus d'une chance sur deux d'avoir au moins une bonne réponse, mais très peu de chances de tout réussir.

Réponse. a) $\frac{1}{64}$ — b) $\frac{27}{64}$ — c) $\frac{37}{64} \approx 0,578$.

Correction de l'exercice 7 - Trois feux verts

Chaque feu est une épreuve de Bernoulli de succès « vert », $p = 0,6$.

a) Un seul chemin :

$$P(\text{trois verts}) = 0,6^3 = 0,216$$

b) « Au moins un feu non vert » est le contraire de « trois verts » :

$$1 - 0,216 = 0,784$$

Le livreur s'arrête au moins une fois dans environ 78 % des trajets, alors que chaque feu est vert plus d'une fois sur deux. L'indépendance des feux est une hypothèse : des feux synchronisés (« onde verte ») ne le seraient pas.

Réponse. a) 0,216 — b) 0,784.

Correction de l'exercice 8 - Lister les chemins

a) On liste en faisant varier le dernier résultat le plus vite, comme on lit les feuilles de l'arbre de haut en bas : *SSS, SSE, SES, SEE, ESS, ESE, EES, EEE*.

b) Exactement un succès : *SEE, ESE, EES*, soit 3 issues (le succès est au premier, deuxième ou troisième rang). Exactement deux succès : *SSE, SES, ESS*, soit 3 issues aussi.

c) Avec $p = 0,5$, chaque issue a pour probabilité $0,5^3 = 0,125$, donc

$$P(\text{exactement un succès}) = 3 \times 0,125 = 0,375$$

Réponse. b) 3 et 3 — c) 0,375.

Correction de l'exercice 9 - Premier succès au troisième essai

« La première vente arrive au troisième appel » signifie : échec au premier appel, échec au deuxième, succès au troisième. C'est un seul chemin, dans cet ordre :

$$P(\overline{S}\overline{S}S) = 0,7 \times 0,7 \times 0,3 = 0,147$$

Il ne faut pas compter les autres chemins à un succès ($S\bar{S}\bar{S}$ et $\bar{S}S\bar{S}$) : dans ces cas, la première vente arrive plus tôt.

Pour comparaison, la probabilité d'une vente dès le premier appel est 0,3, et dès le deuxième $0,7 \times 0,3 = 0,21$.

Réponse. 0,147.

Correction de l'exercice 10 - Nombre moyen de succès

a) On applique la définition de l'espérance :

$$E(X) = 0 \times 0,512 + 1 \times 0,384 + 2 \times 0,096 + 3 \times 0,008$$

$$E(X) = 0 + 0,384 + 0,192 + 0,024 = 0,6.$$

b) $3 \times 0,2 = 0,6$: on retrouve le même nombre. Sur un grand nombre de groupes de trois clients, on compte en moyenne 0,6 acheteur par groupe, ce qui correspond bien à trois clients qui achètent chacun une fois sur cinq.

Ce résultat se vérifie sur chaque exemple ; il donne un contrôle rapide du calcul de l'espérance.

Réponse. a) $E(X) = 0,6$ — b) égal à $3 \times 0,2$.

Correction de l'exercice 11 - Au moins un six en trois lancers

Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de succès « obtenir 6 », $p = \frac{1}{6}$. « Au moins un 6 » regroupe sept chemins sur huit : on passe par le contraire, « aucun 6 », qui n'en compte qu'un.

$$P(\text{aucun 6}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P(\text{au moins un 6}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0,421$$

Avec deux lancers, cette probabilité valait $\frac{11}{36} \approx 0,306$: chaque lancer supplémentaire l'augmente, sans jamais atteindre 1.

Réponse. $\frac{91}{216} \approx 0,421$.

Correction de l'exercice 12 - Au moins deux rendez-vous

« Au moins deux » signifie « exactement deux » ou « trois ».

Exactement deux rendez-vous : trois chemins, chacun de probabilité $0,4^2 \times 0,6 = 0,096$, soit

$$3 \times 0,096 = 0,288$$

Trois rendez-vous : un chemin, $0,4^3 = 0,064$.

On additionne : $P(\text{au moins deux}) = 0,288 + 0,064 = 0,352$.

Le commercial obtient au moins deux rendez-vous un peu plus d'une fois sur trois.

Réponse. 0,352.

Correction de l'exercice 13 - Repérer une erreur

L'erreur. L'élève n'a compté qu'un chemin : celui où la pièce défectueuse est la première. Or elle peut être la première, la deuxième ou la troisième : DCC , CDC et CCD .

La correction. Ces trois chemins ont la même probabilité, $0,1 \times 0,9^2 = 0,081$. On les additionne :

$$P(\text{exactement une}) = 3 \times 0,081 = 0,243$$

Contrôle. Avec la valeur de l'élève, la somme des probabilités de 0, 1, 2 et 3 défectueuses ne vaudrait pas 1 : $0,729 + 0,081 + 0,027 + 0,001 = 0,838$.

Réponse. $3 \times 0,081 = 0,243$.

Correction de l'exercice 14 - Gagner au moins deux manches

Pour le premier joueur, chaque manche est une épreuve de Bernoulli de succès « gagner la manche », $p = 0,5$. Chaque issue des trois manches a pour probabilité $0,5^3 = 0,125$.

Gagner au moins deux manches : exactement deux (trois issues) ou trois (une issue), soit 4 issues :

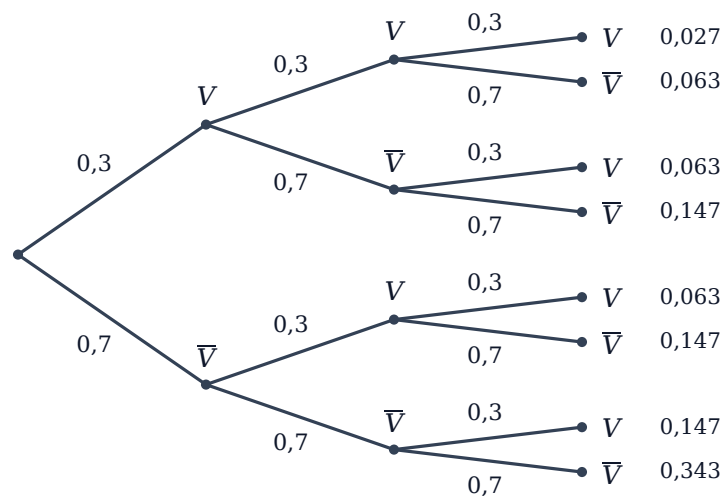
$$P(\text{gagner le match}) = 4 \times 0,125 = 0,5$$

C'était prévisible : les joueurs sont de même niveau et l'un des deux gagne forcément (il n'y a pas d'égalité en trois manches). Chacun a donc une chance sur deux.

Réponse. 0,5.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le gain de trois ventes

a) Chaque client est une épreuve de Bernoulli de succès V , $p = 0,3$.



V : le client achète

b) La commission vaut 20 € par vente, donc 0, 20, 40 ou 60 € selon le nombre de ventes. On regroupe les chemins :

- $P(G = 0) = 0,7^3 = 0,343$;
- $P(G = 20) = 3 \times 0,3 \times 0,49 = 0,441$;
- $P(G = 40) = 3 \times 0,09 \times 0,7 = 0,189$;
- $P(G = 60) = 0,3^3 = 0,027$.

c) $E(G) = 0 \times 0,343 + 20 \times 0,441 + 40 \times 0,189 + 60 \times 0,027 = 8,82 + 7,56 + 1,62 = 18$ €.

Sur un grand nombre de séries de trois clients, le vendeur touche en moyenne 18 € par série, soit 6 € par client rencontré.

Réponse. b) 0,343 ; 0,441 ; 0,189 ; 0,027 — c) $E(G) = 18$ €.