

Plaquette 4 - Au moins un, au plus un : passer par le contraire

Répétition d'épreuves indépendantes — Première STMG

Exercices

Méthode

Les questions « au moins un », « au plus un », « au moins deux » regroupent souvent beaucoup de chemins. L'**événement contraire** en compte parfois un seul : on le calcule, puis on retrace à 1. On l'applique à la fiabilité d'un système (alarmes, sauvegardes, machines en série).

Exercice 1 - Au moins un gagnant

Un jeu à gratter est gagnant avec la probabilité 0,2, indépendamment d'un ticket à l'autre. On achète trois tickets. Calculer la probabilité d'avoir au moins un ticket gagnant.

Exercice 2 - Au plus un retard

Un train est en retard avec la probabilité 0,3, indépendamment d'un jour à l'autre. Un salarié prend ce train trois jours de suite. Calculer la probabilité qu'il subisse au plus un retard.

Exercice 3 - Associer chaque événement à son contraire

On répète trois fois une épreuve de Bernoulli. Associer chaque événement à son contraire :

- a) « au moins un succès » ;
- b) « au plus un succès » ;
- c) « trois succès » ;
- d) « au plus deux succès ».

Contraire proposés : « au moins deux succès », « aucun succès », « au moins un échec », « trois succès ».

Exercice 4 - Combien de tentatives ?

Une épreuve de Bernoulli a une probabilité de succès $p = 0,5$. On la répète n fois de façon indépendante, avec $n \leq 4$.

- a) Calculer la probabilité d'au moins un succès pour $n = 1, 2, 3$ et 4.
- b) Combien de répétitions faut-il au minimum pour que cette probabilité dépasse 0,9 ?

Exercice 5 - Au moins deux faces

On lance quatre fois une pièce équilibrée. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois face.

Exercice 6 – Deux détecteurs valent mieux qu'un

Un détecteur de fumée fonctionne correctement avec la probabilité 0,9. Un restaurant installe plusieurs détecteurs indépendants ; l'alerte est donnée si au moins un détecteur fonctionne.

- Calculer la probabilité que l'alerte soit donnée avec deux détecteurs, puis avec trois.
- Commenter.

Exercice 7 – Une sauvegarde sur deux disques

Un disque dur tombe en panne dans l'année avec la probabilité 0,05. Une entreprise copie ses données sur deux disques indépendants. Elle ne perd ses données que si les deux disques tombent en panne.

- Calculer la probabilité de perdre les données dans l'année.
- Calculer la probabilité qu'au moins un disque tombe en panne.

Exercice 8 – Machines en série, machines en parallèle

Chacune de trois machines fonctionne toute la journée avec la probabilité 0,95, indépendamment.

- Une chaîne de production a besoin des trois machines (montage en série). Calculer la probabilité qu'elle fonctionne toute la journée.
- Dans un autre atelier, une seule machine suffit, les deux autres sont des secours (montage en parallèle). Même question.

Exercice 9 – Repérer une erreur de contraire

Une machine produit 10 % de pièces défectueuses. Pour trois pièces prélevées indépendamment, un élève écrit : « $P(\text{au moins une défectueuse}) = 1 - 0,1^3 = 0,999$ ». Corriger.

Exercice 10 – Un sondage auprès de quatre personnes

Dans une ville, 55 % des habitants sont favorables à un projet. On interroge quatre habitants choisis au hasard (réponses assimilées à des épreuves indépendantes).

- Calculer la probabilité qu'au moins un des quatre soit favorable.
- Calculer la probabilité qu'une majorité (au moins trois) soit favorable.

Exercice 11 – Un faux positif

Un test de dépistage donne un faux résultat positif avec la probabilité 0,02 chez une personne non malade. Une personne non malade passe trois fois le test, de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'elle obtienne au moins un résultat positif, arrondie au millième.

Exercice 12 – Pile au moins une fois

Un jeu consiste à lancer quatre fois une pièce équilibrée ; on gagne si l'on obtient au moins une fois pile. Calculer la probabilité de gagner, puis de perdre.

Exercice 13 – Au moins une acceptation

Une entreprise envoie une offre à quatre clients. Chacun l'accepte avec la probabilité 0,15, indépendamment.

- a) Calculer la probabilité qu'aucun client n'accepte, arrondie à 10^{-4} .
- b) En déduire la probabilité qu'au moins un client accepte.

Exercice 14 – Tous satisfaits ?

Un artisan satisfait chaque client avec la probabilité 0,9, indépendamment. Il réalise trois chantiers dans la semaine.

- a) Calculer la probabilité que les trois clients soient satisfaits.
- b) Calculer la probabilité qu'au moins un client soit mécontent.
- c) Calculer la probabilité qu'au moins deux clients soient mécontents.

Exercice 15 – Synthèse : un serveur de secours

Le site d'une boutique en ligne est hébergé sur un serveur disponible avec la probabilité 0,8 pendant un pic de trafic. On peut ajouter jusqu'à trois serveurs de secours identiques et indépendants ; le site reste accessible si au moins un serveur est disponible.

- a) Calculer la probabilité que le site reste accessible avec 1, 2, 3 puis 4 serveurs au total.
- b) La direction exige au moins 99 % de disponibilité. Combien de serveurs faut-il ?