

Plaquette 4 – Mesurer la dispersion

Statistique descriptive — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois indicateurs.

Indicateur	Formule	Associé à
étendue	max – min	rien de particulier
écart interquartile	$Q_3 - Q_1$	la médiane
écart type σ	à la calculatrice	la moyenne

L'écart type à la main. On calcule d'abord la **variance** :

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{N}$$

puis :

$$\sigma = \sqrt{V}$$

Ce que dit l'écart type. C'est l'écart **moyen** à la moyenne. Plus il est petit, plus la série est **régulière**, plus les valeurs sont resserrées autour de $\bar{x}$.

L'intervalle usuel. On regarde souvent combien de valeurs tombent dans :

$$[\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma]$$

Effet d'une transformation.

Transformation	Moyenne	Écart type
ajouter k	$+k$	inchangé
multiplier par $k > 0$	$\times k$	$\times k$

Le diagramme en boîte. La boîte va de Q_1 à Q_3 , une barre marque la médiane, les moustaches vont jusqu'au minimum et au maximum. La boîte contient **la moitié** des valeurs.

△ L'étendue ne dépend que de **deux** valeurs : une seule donnée extrême la fait exploser. L'écart interquartile, lui, l'ignore.

Correction de l'exercice 1 – Étendue et écart interquartile

a) **Maximum** : 20 ✓

— **Minimum** : 8 ✓

— **Différence** : 20 – 8 ✓

— **Étendue** :

12

b) **Formule** : $Q_3 - Q_1$ ✓

— **Substitution** : 16 – 11 ✓

— **Écart interquartile** :

5

- c) **Lecture de l'étendue** : toutes les notes tiennent sur 12 points ✓
- **Lecture de l'écart interquartile** : la moitié centrale tient sur 5 points ✓
 - **Effectif dans [11 ; 16]** : comptons ✓
 - **Valeurs** : 11 ; 11 ; 12 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 15 ; 16 ✓
 - **Nombre** : 9 sur 15 ✓
 - **Proportion** : 60 % ✓
 - **Au moins la moitié** : conforme à la définition ✓
 - **Comparaison des deux indicateurs** : 5 est bien plus petit que 12 ✓
 - **Explication** : l'écart interquartile ignore les extrêmes ✓
 - **Test** : remplacer 20 par 80 ✓
 - **Nouvelle étendue** : 72 ✓
 - **Nouvel écart interquartile** : toujours 5 ✓
 - **Conclusion** : l'écart interquartile est **robuste** ✓

Réponse. a) 12 · b) 5 · c) la moitié centrale des notes tient sur 5 points.

Correction de l'exercice 2 - Calculer un écart type à la main

a) **Somme** : $8 + 9 + 10 + 11 + 12$ ✓

- **Total** : 50 ✓
- **Effectif** : 5 ✓
- **Moyenne** :

$$\bar{x} = 10$$

b) **Écart de 8** : $8 - 10 = -2$ ✓

- **Carré** : 4 ✓
- **Écart de 9** : -1, carré 1 ✓
- **Écart de 10** : 0, carré 0 ✓
- **Écart de 11** : 1, carré 1 ✓
- **Écart de 12** : 2, carré 4 ✓
- **Somme des carrés** : $4 + 1 + 0 + 1 + 4$ ✓
- **Total** : 10 ✓
- **Variance** : $\frac{10}{5}$ ✓
- **Valeur** :

$$V = 2$$

c) **Écart type** : $\sqrt{2}$ ✓

- **Valeur approchée** :

$$\sigma \approx 1,41$$

- **Interprétation** : les valeurs s'écartent en moyenne de 1,41 de 10 ✓
- **Intervalle usuel** : [8,59 ; 11,41] ✓
- **Valeurs dedans** : 9, 10, 11 ✓
- **Nombre** : 3 sur 5 ✓
- **Proportion** : 60 % ✓
- **Contrôle de l'ordre de grandeur** : σ est plus petit que l'étendue ✓
- **Étendue** : 4 ✓

— **Cohérence** : $1,41 < 4$ ✓

Réponse. a) 10 · b) $V = 2$ · c) $\sigma = \sqrt{2} \approx 1,41$.

Correction de l'exercice 3 - Même moyenne, dispersions différentes

a) **Moyenne de A** : $\frac{50}{5} = 10$ ✓

— **Somme de B** : $4 + 7 + 10 + 13 + 16$ ✓

— **Détail** : $4 + 7 = 11$ ✓

— **Puis** : $11 + 10 + 13 + 16$ ✓

— **Total** : 50 ✓

— **Moyenne de B** :

10

— **Conclusion** : les moyennes sont **égales** ✓

b) **Écart de 4** : -6, carré 36 ✓

— **Écart de 7** : -3, carré 9 ✓

— **Écart de 10** : 0 ✓

— **Écart de 13** : 3, carré 9 ✓

— **Écart de 16** : 6, carré 36 ✓

— **Somme** : $36 + 9 + 0 + 9 + 36$ ✓

— **Total** : 90 ✓

— **Variance** : $\frac{90}{5} = 18$ ✓

— **Écart type** :

$$\sigma_B = \sqrt{18} \approx 4,24$$

c) **Écart type de A** : $\approx 1,41$ ✓

— **Rapport** : 3 ✓

— **Vérification** : $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ✓

— **Conclusion** : B est **trois fois** plus dispersée ✓

— **Étendue de A** : 4 ✓

— **Étendue de B** : 12 ✓

— **Même rapport** : 3 ✓

— **Leçon** : la moyenne seule ne décrit pas une série ✓

— **Bonne pratique** : toujours donner $\bar{x}$ **et** σ ✓

Réponse. a) toutes deux 10 · b) $\sigma_B \approx 4,24$ · c) B est trois fois plus dispersée que A.

Correction de l'exercice 4 - Deux machines à comparer

— **Moyenne de A** : somme 2500 ✓

— **Valeur** : 500 g ✓

— **Moyenne de B** : somme 2500 ✓

— **Valeur** : 500 g ✓

— **Constat** : mêmes moyennes ✓

— **Écarts de A** : -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ✓

— **Carrés** : 4 ; 1 ; 0 ; 1 ; 4 ✓

— **Somme** : 10 ✓

— **Variance de A** : 2 ✓

— **Écart type de A :**

$$\sigma_A \approx 1,41 \text{ g}$$

— **Écarts de B :** -6 ; -3 ; 0 ; 3 ; 6 ✓— **Somme des carrés :** 90 ✓— **Variance de B :** 18 ✓— **Écart type de B :**

$$\sigma_B \approx 4,24 \text{ g}$$

— **Comparaison :** $1,41 < 4,24$ ✓— **Conclusion :** la machine **A** est plus fiable ✓— **Interprétation :** ses pièces sont plus régulières ✓— **Tolérance de $\pm 3 \text{ g}$, machine A :** toutes les pièces passent ✓— **Machine B :** deux pièces hors tolérance ✓— **Lesquelles :** 494 et 506 ✓— **Taux de rebut de B :** 40 % ✓

Réponse. La machine A : même moyenne 500 g, mais $\sigma_A \approx 1,41$ contre $\sigma_B \approx 4,24$.

Correction de l'exercice 5 - Écart type avec effectifs

a) **Effectif total :** $2 + 5 + 8 + 3 + 2$ ✓— **Total :** $N = 20$ ✓— **Produit 1 :** $8 \times 2 = 16$ ✓— **Produit 2 :** $10 \times 5 = 50$ ✓— **Produit 3 :** $12 \times 8 = 96$ ✓— **Produit 4 :** $14 \times 3 = 42$ ✓— **Produit 5 :** $16 \times 2 = 32$ ✓— **Somme :** $16 + 50 + 96 + 42 + 32$ ✓— **Total :** 236 ✓— **Moyenne :** $\frac{236}{20}$ ✓— **Valeur :**

$$\bar{x} = 11,8$$

b) **Écart de 8 :** -3,8, carré 14,44 ✓— **Pondéré :** $14,44 \times 2 = 28,88$ ✓— **Écart de 10 :** -1,8, carré 3,24 ✓— **Pondéré :** $3,24 \times 5 = 16,2$ ✓— **Écart de 12 :** 0,2, carré 0,04 ✓— **Pondéré :** $0,04 \times 8 = 0,32$ ✓— **Écart de 14 :** 2,2, carré 4,84 ✓— **Pondéré :** $4,84 \times 3 = 14,52$ ✓— **Écart de 16 :** 4,2, carré 17,64 ✓— **Pondéré :** $17,64 \times 2 = 35,28$ ✓— **Somme :** 95,2 ✓— **Variance :** $\frac{95,2}{20}$ ✓— **Valeur :** $V = 4,76$ ✓— **Écart type :**

$$\sigma \approx 2,18$$

Réponse. a) $11,8$ · b) $V = 4,76$ et $\sigma \approx 2,18$.

Correction de l'exercice 6 - Interpréter un écart type

a) **Borne inférieure** : $12,2 - 1,9$ ✓

— **Valeur** : $10,3$ ✓

— **Borne supérieure** : $12,2 + 1,9$ ✓

— **Valeur** : $14,1$ ✓

— **Intervalle** :

$$[10,3; 14,1]$$

— **Interprétation** : la plupart des valeurs y tombent ✓

— **Ordre de grandeur habituel** : environ deux tiers ✓

b) **Écart type nul** : tous les écarts sont nuls ✓

— **Conséquence** : toutes les valeurs valent $\bar{x}$ ✓

— **Description** :

série constante

— **Exemple** : $12 ; 12 ; 12 ; 12$ ✓

— **Étendue correspondante** : 0 ✓

— **Écart interquartile** : 0 aussi ✓

c) **Écart type de 6 sur une moyenne de $12,2$** ✓

— **Rapport** : environ la moitié de la moyenne ✓

— **Appréciation** : très dispersée ✓

— **Intervalle usuel** : $[6,2 ; 18,2]$ ✓

— **Largeur** : 12 points ✓

— **Interprétation scolaire** : des niveaux très hétérogènes ✓

— **Comparaison avec $1,9$** : classe homogène ✓

— **Usage pédagogique** : σ faible, un cours commun suffit ✓

— σ **fort** : il faut différencier ✓

— **Règle pratique** : comparer σ à la moyenne ✓

Réponse. a) $[10,3 ; 14,1]$ · b) la série est constante · c) elle est très hétérogène.

Correction de l'exercice 7 - Effet d'une transformation

a) **Effet sur la moyenne** : $+2$ ✓

— **Nouvelle moyenne** :

$$16$$

— **Effet sur les écarts à la moyenne** : aucun ✓

— **Raison** : tout est décalé de la même quantité ✓

— **Nouvel écart type** :

$$3$$

— **Nouvelle étendue** : 11 ✓

— **Image mentale** : on déplace le nuage sans le déformer ✓

b) **Effet sur la moyenne** : multipliée par $1,5$ ✓

- **Calcul** : $14 \times 1,5$ ✓
- **Nouvelle moyenne** :
21
- **Effet sur les écarts** : multipliés par 1,5 ✓
- **Nouvel écart type** : $3 \times 1,5$ ✓
- **Valeur** :
4,5
- **Nouvelle étendue** : $11 \times 1,5$ ✓
- **Valeur** : 16,5 ✓
- **Image mentale** : on dilate le nuage ✓
- **Application 1** : convertir des euros en francs suisses ✓
- **Effet** : tout est multiplié, dispersion comprise ✓
- **Application 2** : ajouter un point à tout le monde ✓
- **Effet** : la moyenne monte, l'hétérogénéité reste ✓
- **Cas mixte** $1,5x + 2$: moyenne 23 ✓
- **Écart type** : 4,5 ✓

Réponse. a) 16 ; 3 ; 11 · b) 21 ; 4,5 ; 16,5.

Correction de l'exercice 8 – Construire un diagramme en boîte

- **Axe** : gradué de 8 à 20 au moins ✓
- **Moustache gauche** : de 8 à 11 ✓
- **Longueur** : 3 ✓
- **Bord gauche de la boîte** : en 11 ✓
- **Bord droit de la boîte** : en 16 ✓
- **Largeur de la boîte** :
5
- **Barre verticale** : en 13 ✓
- **Moustache droite** : de 16 à 20 ✓
- **Longueur** : 4 ✓
- **Contenu de la boîte** : au moins 50 % des valeurs ✓
- **Position de la médiane dans la boîte** : à 2 du bord gauche ✓
- **Et à 3 du bord droit** ✓
- **Lecture** : la boîte est légèrement **étirée vers la droite** ✓
- **Interprétation** : les valeurs hautes sont plus étalées ✓
- **Étendue totale** : 12 ✓
- **Écart interquartile** : 5 ✓
- **Rapport** : la boîte occupe moins de la moitié de l'axe ✓
- **Ce qu'on ne voit pas** : le nombre de valeurs ✓
- **Ni la moyenne** : le diagramme ne l'affiche pas ✓

Réponse. Moustaches $8 \rightarrow 11$ et $16 \rightarrow 20$, boîte de 11 à 16, barre médiane en 13.

Correction de l'exercice 9 – Lire un diagramme en boîte

- a) **Intervalle demandé** : de Q_1 à Q_3 ✓
- **C'est exactement la boîte** ✓

— **Proportion :**

au moins 50 %

— **Écart interquartile :** $10 - 6$ ✓— **Valeur :** 4 minutes ✓b) **Moustache gauche :** de 2 à 6 ✓— **Longueur :** 4 ✓— **Moustache droite :** de 10 à 22 ✓— **Longueur :** 12 ✓— **Comparaison :** la droite est **trois fois** plus longue ✓— **Conclusion :** distribution **étirée vers la droite** ✓— **Position de la médiane dans la boîte :** à 3 du bord gauche ✓— **Et à 1 du bord droit** ✓— **Lecture :** le quart supérieur de la boîte est très resserré ✓— **Étendue :** $22 - 2 = 20$ minutes ✓— **Comparaison à l'écart interquartile :** 20 contre 4 ✓— **Rapport :** 5 ✓— **Interprétation :** quelques attentes très longues ✓— **Proportion attendant plus de 10 minutes :** au plus 25 % ✓— **Indicateur conseillé ici :** la médiane ✓— **Raison :** les valeurs extrêmes fausseraient la moyenne ✓— **Estimation de la moyenne :** supérieure à 9 ✓

Réponse. a) au moins 50 % · b) elle est étirée vers la droite : quelques attentes très longues.

Correction de l'exercice 10 - Étendue trompeuse

a) **Maximum :** 60 ✓— **Minimum :** 10 ✓— **Étendue :**

50

b) **Effectif :** $N = 10$ ✓— **Rang de Q_1 :** $\frac{10}{4} = 2,5$ ✓— **Arrondi supérieur :** rang 3 ✓— **Troisième valeur :** 11 ✓— **Premier quartile :** $Q_1 = 11$ ✓— **Médiane :** rangs 5 et 6 ✓— **Valeurs :** 12 et 12 ✓— **Médiane :**

Me = 12

— **Rang de Q_3 :** $\frac{30}{4} = 7,5$ ✓— **Arrondi supérieur :** rang 8 ✓— **Huitième valeur :** 13 ✓— **Troisième quartile :** $Q_3 = 13$ ✓— **Écart interquartile :**

2

c) **Comparaison** : 50 contre 2 ✓

- **Cause de l'écart** : la valeur 60 ✓
- **Effet sur l'étendue** : elle explose ✓
- **Effet sur l'écart interquartile** : nul ✓
- **Indicateur conseillé** : l'**écart interquartile** ✓
- **Description juste** : série très resserrée, avec une valeur aberrante ✓
- **Moyenne** : 16,8 ✓
- **Comparaison à la médiane** 12 : très supérieure ✓

Réponse. a) 50 · b) $Q_1 = 11$, $Me = 12$, $Q_3 = 13$, écart interquartile 2 · c) l'écart interquartile.

Correction de l'exercice 11 - Comparer deux classes

a) **Moyennes** : identiques ✓

- **Écarts types** : 1,5 contre 4,5 ✓
- **Rapport** : 3 ✓
- **Classe homogène** : la **A** ✓
- **Classe hétérogène** : la **B** ✓

b) **Intervalle pour A** : [10,5 ; 13,5] ✓

- **Largeur** : 3 ✓
- **Intervalle pour B** : [7,5 ; 16,5] ✓
- **Largeur** :

9

- **Comparaison** : trois fois plus large ✓

c) **Écart à la moyenne** : $16 - 12 = 4$ ✓

- **En nombre d'écarts types pour A** : $\frac{4}{1,5}$ ✓
- **Valeur** :

 $\approx 2,7$

- **Pour B** : $\frac{4}{4,5}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 0,9$ ✓
- **Comparaison** : $2,7 > 0,9$ ✓
- **Conclusion** : il est bien plus remarquable en **classe A** ✓
- **Explication** : 16 y sort nettement du groupe ✓
- **En classe B** : 16 reste dans l'intervalle usuel ✓
- **Contrôle** : $16 < 16,5$ ✓
- **Leçon** : une note ne se juge pas dans l'absolu ✓
- **Bonne pratique** : la situer par rapport à $\bar{x}$ et σ ✓

Réponse. a) A est homogène, B hétérogène · b) [10,5 ; 13,5] et [7,5 ; 16,5] · c) en classe A.

Correction de l'exercice 12 - Choisir un couple d'indicateurs

- a) **Présence de valeurs extrêmes** : oui, les biens de luxe ✓
- **Indicateur de position** : la médiane ✓

— **Indicateur de dispersion associé :**

l'écart interquartile

— **Règle :** médiane et écart interquartile vont **ensemble** ✓— **Justification :** tous deux sont robustes ✓b) **Objectif :** contrôler la régularité ✓— **Indicateur de position :** la moyenne ✓— **Indicateur de dispersion :**

l'écart type

— **Justification :** on veut mesurer l'écart à la cible ✓— **Usage industriel :** tolérances exprimées en écarts types ✓c) **Série régulière :** pas d'extrême ✓— **Indicateur de position :** la moyenne ✓— **Indicateur de dispersion :** l'écart type ✓— **Avantage :** il utilise toutes les données ✓— **Couples à ne pas mélanger** ✓— **Mauvais couple :** médiane et écart type ✓— **Autre mauvais couple :** moyenne et écart interquartile ✓— **Raison :** chaque dispersion se lit autour de sa position ✓— **Résumé en cinq nombres :** min, Q_1 , Me, Q_3 , max ✓— **Il accompagne la médiane** ✓**Réponse.** a) médiane et écart interquartile · b) et c) moyenne et écart type.**Correction de l'exercice 13 – Un contrôle de qualité**a) **Borne inférieure :** $500 - 5$ ✓— **Valeur :** 495 mL ✓— **Borne supérieure :** $500 + 5$ ✓— **Valeur :** 505 mL ✓— **Intervalle :**

[495 ; 505]

b) **Demi-largeur :** 5 mL ✓— **Écart type :** 2 mL ✓— **Quotient :** $\frac{5}{2}$ ✓— **Valeur :**

2,5 écarts types

c) **Appréciation :** c'est confortable ✓— **Repère usuel :** l'essentiel d'une série tient dans ± 2 écarts types ✓— **Ici :** la tolérance va au-delà ✓— **Conclusion :** production a priori **conforme** ✓— **Si l'écart type montait à 4 mL :** quotient 1,25 ✓— **Appréciation :** nettement plus risqué ✓— **Action :** régler la machine ✓— **Si la moyenne dérivait à 503 mL :** nouvelle marge haute 2 mL ✓

- **En écarts types** : 1 seulement ✓
- **Conclusion** : un décentrage est aussi grave qu'une dispersion ✓
- **Deux contrôles à mener** : la **position** et la **dispersion** ✓
- **Vocabulaire industriel** : justesse et fidélité ✓

Réponse. a) [495 ; 505] · b) 2,5 écarts types · c) oui, la marge est confortable.

Correction de l'exercice 14 - Repérer une erreur

- **Ce qui est vrai** : $8 > 5$ ✓
- **Ce qui est discutable** : la conclusion ✓
- **Problème** : les moyennes sont très différentes ✓
- **Idée** : rapporter l'écart type à la moyenne ✓
- **Pour A** : $\frac{5}{10}$ ✓
- **Valeur** : 0,5, soit 50 % ✓
- **Pour B** : $\frac{8}{100}$ ✓
- **Valeur** : 0,08, soit 8 % ✓
- **Comparaison** : 50 % > 8 % ✓
- **Conclusion** : c'est A qui est relativement plus dispersée ✓
- **Nom de cet indicateur** : le coefficient de variation ✓
- **Interprétation pour A** : les valeurs varient énormément ✓
- **Exemple de série A** : 5 ; 10 ; 15 ✓
- **Interprétation pour B** : les valeurs sont resserrées ✓
- **Exemple de série B** : 92 ; 100 ; 108 ✓
- **Quand la comparaison brute est valable** : mêmes unités et moyennes proches ✓
- **Exemple valable** : deux classes notées sur 20 ✓
- **Exemple invalide** : des euros contre des kilos ✓
- **Leçon** : un écart type ne se lit jamais seul ✓

Réponse. En relatif, A varie de 50 % contre 8 % pour B : c'est A la plus dispersée.

Correction de l'exercice 15 - Reconstituer une série

- a) **Écart type nul** : la variance est nulle ✓
- **Variance** : somme de carrés divisée par N ✓
- **Une somme de carrés nulle** : chaque carré est nul ✓
- **Donc** : chaque écart à la moyenne est nul ✓
- **Conclusion** :
les quatre valeurs valent 10
- **Contrôle de la moyenne** : $\frac{40}{4} = 10$ ✓
- b) **Somme** : $5 + 5 + 15 + 15$ ✓
- **Total** : 40 ✓
- **Moyenne** : $\frac{40}{4} = 10$ ✓
- **Écart de 5** : -5, carré 25 ✓
- **Il apparaît deux fois** : 50 ✓
- **Écart de 15** : 5, carré 25 ✓

- **Il apparaît deux fois** : 50 ✓
- **Somme des carrés** : 100 ✓
- **Variance** : $\frac{100}{4}$ ✓
- **Valeur** : 25 ✓
- **Écart type** :

$$\sigma = 5$$

- **Vérification confirmée** ✓
- **Cas particulier** : ici toutes les valeurs sont à 5 de la moyenne ✓
- **Conséquence** : l'écart type vaut exactement cet écart ✓
- **Étendue** : 10 ✓
- **Rapport à l'écart type** : 2 ✓

Réponse. a) toutes valent 10 · b) oui : moyenne 10, variance 25, $\sigma = 5$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : deux fournisseurs

a) **Somme de A** : $4 + 5 + 5 + 6 + 6 + 6 = 32$ ✓

- **Puis** : $32 + 7 + 7 + 8 + 6$ ✓
- **Total** : 60 ✓
- **Moyenne de A** : $\frac{60}{10} = 6$ jours ✓
- **Somme de B** : $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$ ✓
- **Puis** : $20 + 7 + 8 + 9 + 10 + 6$ ✓
- **Total** : 60 ✓
- **Moyenne de B** :

6 jours

- **Conclusion** : moyennes **identiques** ✓

b) **Étendue de A** : $8 - 4$ ✓

- **Valeur** : 4 jours ✓
- **Étendue de B** : $10 - 2$ ✓
- **Valeur** :

8 jours

- **Rapport** : 2 ✓

c) **Critère décisif** : la régularité ✓

- **Fournisseur le plus régulier** : le A ✓
- **Justification** : étendue deux fois plus faible ✓
- **Délai maximal chez A** : 8 jours ✓
- **Délai maximal chez B** : 10 jours ✓
- **Intérêt pour la gestion des stocks** : prévoir 8 jours suffit avec A ✓
- **Avec B** : il faut prévoir 10 jours ✓
- **Coût de cette incertitude** : du stock immobilisé ✓
- **Conclusion** : choisir A ✓
- **Réserve** : si B est moins cher, il faut arbitrer ✓
- **Leçon** : à moyenne égale, la dispersion décide ✓

Réponse. a) toutes deux 6 jours · b) 4 contre 8 jours · c) le fournisseur A, plus régulier.