

Plaquette 2 - Ajustement affine : au jugé et droite de Mayer

Séries statistiques à deux variables — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équation d'une droite passant par deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, avec $x_A \neq x_B$: $y = ax + b$, où

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{puis} \quad b = y_A - a x_A$$

Ajustement au jugé. On trace une droite qui passe « au milieu » du nuage, de préférence par le point moyen G , avec autant de points de part et d'autre.

Méthode de Mayer.

1. Ranger les points par abscisses croissantes. 2. Les partager en deux groupes de même effectif (les premiers, les derniers). 3. Calculer les points moyens G_1 et G_2 des deux groupes. 4. La droite de Mayer est la droite (G_1G_2) ; elle passe par G .

Interpréter $y = ax + b$: quand x augmente de 1, y augmente de a en moyenne (diminue si $a < 0$) ; b est la valeur estimée de y pour $x = 0$, à n'utiliser que si $x = 0$ a un sens dans la situation.

Correction de l'exercice 1 - Une droite qui passe par le point moyen

a) La droite passe par $A(1; 20)$ et $G(4; 30,5)$. Son coefficient directeur est

$$a = \frac{30,5 - 20}{4 - 1} = \frac{10,5}{3} = 3,5$$

puis $b = 20 - 3,5 \times 1 = 16,5$. L'équation de D est $y = 3,5x + 16,5$.

Contrôle : $3,5 \times 4 + 16,5 = 30,5$, la droite passe bien par G .

b) 4 500 € correspondent à $x = 4,5$: $y = 3,5 \times 4,5 + 16,5 = 32,25$. On peut estimer les ventes à environ 32 250 €.

Un ajustement au jugé dépend du point choisi : une autre personne aurait pu choisir une autre droite. La méthode de Mayer donne une droite unique.

Réponse. a) $y = 3,5x + 16,5$ — b) environ 32 250 €.

Correction de l'exercice 2 - La droite de Mayer

a) Les abscisses sont déjà rangées par ordre croissant. On forme deux groupes de trois points :

$$G_1\left(\frac{1+2+3}{3}; \frac{20+23+26}{3}\right) = (2; 23) \quad G_2\left(\frac{5+6+7}{3}; \frac{35+38+41}{3}\right) = (6; 38)$$

b) Le coefficient directeur de (G_1G_2) est

$$a = \frac{38 - 23}{6 - 2} = \frac{15}{4} = 3,75$$

puis $b = 23 - 3,75 \times 2 = 15,5$. La droite de Mayer a pour équation $y = 3,75x + 15,5$.

Contrôle avec G_2 : $3,75 \times 6 + 15,5 = 22,5 + 15,5 = 38$.

Réponse. a) $G_1(2; 23)$, $G_2(6; 38)$ — b) $y = 3,75x + 15,5$.

Correction de l'exercice 3 - La droite de Mayer passe par G

a) On remplace x par l'abscisse de G :

$$3,75 \times 4 + 15,5 = 15 + 15,5 = 30,5$$

On obtient l'ordonnée de G : le point moyen est sur la droite de Mayer.

b) Les deux groupes ont le même effectif (3 points chacun). La moyenne de toute la série est donc la moyenne des moyennes des deux groupes : G est le **milieu** de $[G_1G_2]$. En effet, le milieu de $G_1(2; 23)$ et $G_2(6; 38)$ est $(4; 30,5) = G$. Un milieu de segment appartient à la droite qui porte ce segment.

C'est une bonne propriété : une droite d'ajustement « équilibrée » doit passer par le centre du nuage.

Réponse. a) $3,75 \times 4 + 15,5 = 30,5$ — b) G est le milieu de $[G_1G_2]$.

Correction de l'exercice 4 - Mayer sur une série chronologique

On partage la série en deux groupes de trois années.

$$G_1\left(2; \frac{119 + 127 + 135}{3}\right) = (2; 127) \quad G_2\left(5; \frac{141 + 148 + 155}{3}\right) = (5; 148)$$

Le coefficient directeur de (G_1G_2) est

$$a = \frac{148 - 127}{5 - 2} = \frac{21}{3} = 7$$

et $b = 127 - 7 \times 2 = 113$. La droite de Mayer a pour équation $y = 7x + 113$.

Interprétation : le chiffre d'affaires augmente en moyenne de 7 000 € par an. Contrôle avec le point moyen $G(3,5; 137,5)$: $7 \times 3,5 + 113 = 137,5$.

Réponse. $y = 7x + 113$.

Correction de l'exercice 5 - Une droite de Mayer décroissante

a) Points moyens des deux groupes de trois prix :

$$G_1\left(12; \frac{505 + 455 + 420}{3}\right) = (12; 460) \quad G_2\left(18; \frac{375 + 345 + 300}{3}\right) = (18; 340)$$

Coefficient directeur : $a = \frac{340 - 460}{18 - 12} = \frac{-120}{6} = -20$, puis

$b = 460 - (-20) \times 12 = 460 + 240 = 700$. La droite de Mayer a pour équation $q = -20p + 700$.

Le coefficient est négatif : chaque euro de plus sur le prix fait perdre en moyenne 20 ventes par semaine.

b) $q = -20 \times 15 + 700 = 400$. On peut estimer à 400 le nombre de ventes hebdomadaires au prix de 15 €, ce qui correspond au point moyen $G(15; 400)$.

Réponse. a) $q = -20p + 700$ — b) environ 400 ventes.

Correction de l'exercice 6 - Chauffage et température

On forme les deux groupes de trois relevés, rangés par températures croissantes :

$$G_1\left(2; \frac{93 + 86 + 79}{3}\right) = (2; 86) \quad G_2\left(8; \frac{70 + 62 + 54}{3}\right) = (8; 62)$$

$$a = \frac{62 - 86}{8 - 2} = \frac{-24}{6} = -4 \quad b = 86 - (-4) \times 2 = 94$$

La droite de Mayer a pour équation $C = -4T + 94$.

Interprétation : chaque degré supplémentaire à l'extérieur fait baisser la consommation d'environ 4 kWh par jour. Contrôle avec le point moyen $G(5; 74)$: $-4 \times 5 + 94 = 74$.

Réponse. $C = -4T + 94$: -4 kWh par jour pour chaque degré de plus.

Correction de l'exercice 7 - Surface et chiffre d'affaires

a) Points moyens des deux groupes :

$$G_1\left(4; \frac{150 + 225 + 300}{3}\right) = (4; 225) \quad G_2\left(10; \frac{370 + 432 + 503}{3}\right) = (10; 435)$$

$a = \frac{435 - 225}{10 - 4} = \frac{210}{6} = 35$ et $b = 225 - 35 \times 4 = 85$. La droite de Mayer est $y = 35x + 85$.

b) 1 500 m² correspondent à $x = 15$: $y = 35 \times 15 + 85 = 610$. On peut espérer environ 610 000 € de chiffre d'affaires.

Prudence : 15 est en dehors des données (de 2 à 12). C'est une **extrapolation** ; elle suppose que la tendance reste la même pour un magasin plus grand que tous ceux observés.

Réponse. a) $y = 35x + 85$ — b) environ 610 000 €.

Correction de l'exercice 8 - Lire l'équation d'une droite tracée

a) La droite passe par (1 ; 200) et (5 ; 450) :

$$a = \frac{450 - 200}{5 - 1} = \frac{250}{4} = 62,5 \quad b = 200 - 62,5 \times 1 = 137,5$$

L'équation de D est $y = 62,5x + 137,5$.

b) Pour $x = 3$, la droite donne $62,5 \times 3 + 137,5 = 325$, alors que G a pour ordonnée 324. Le point moyen est à 1 € sous la droite : il en est très proche, ce qui indique un ajustement correct.

c) $y = 62,5 \times 6 + 137,5 = 512,5$. On peut estimer le coût d'entretien d'une machine de 6 ans à environ 512,50 €.

Réponse. a) $y = 62,5x + 137,5$ — b) oui, à 1 € près — c) environ 512,50 €.

Correction de l'exercice 9 - Choisir entre deux droites

a) Pour $x = 4$: la droite de Léa donne $3,75 \times 4 + 15,5 = 30,5$, celle de Tom $4 \times 4 + 12 = 28$. Seule la droite de Léa passe par G .

b) On calcule les valeurs estimées :

$$\text{Léa: } 3,75 \times 1 + 15,5 = 19,25 \quad 3,75 \times 7 + 15,5 = 41,75$$

$$\text{Tom: } 4 \times 1 + 12 = 16 \quad 4 \times 7 + 12 = 40$$

Les écarts aux données sont de 0,75 aux deux bouts pour Léa, et de 4 et 1 pour Tom. La droite de Léa, qui passe par le centre du nuage, suit mieux les points ; celle de Tom est trop basse sur une grande partie du nuage.

Réponse. a) celle de Léa — b) Léa : 19,25 et 41,75 ; Tom : 16 et 40 ; Léa s'ajuste mieux.

Correction de l'exercice 10 - Équation d'une droite : la méthode

On cherche $y = ax + b$. Le coefficient directeur se calcule avec les deux points :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{38 - 23}{6 - 2} = \frac{15}{4} = 3,75$$

On obtient b en écrivant que A est sur la droite : $23 = 3,75 \times 2 + b$, donc

$$b = 23 - 7,5 = 15,5.$$

L'équation est $y = 3,75x + 15,5$. Contrôle avec B : $3,75 \times 6 + 15,5 = 38$.

Pour C : $3,75 \times 10 + 15,5 = 37,5 + 15,5 = 53$. Le point $C(10 ; 53)$ appartient donc à la droite.

Réponse. $y = 3,75x + 15,5$; C appartient à la droite.

Correction de l'exercice 11 - Prévoir avec la droite de Mayer

a) Le rang 1 correspond à 2019, donc 2025 a pour rang $2025 - 2018 = 7$.

$$y = 7 \times 7 + 113 = 162$$

On peut estimer le chiffre d'affaires de 2025 à environ 162 000 €.

b) On résout $7x + 113 > 175$:

$$7x > 62 \Leftrightarrow x > \frac{62}{7} \approx 8,86$$

Le premier rang entier qui convient est 9, c'est-à-dire l'année $2018 + 9 = 2027$. Contrôle : rang 8 (2026) donne 169, rang 9 donne 176.

Ces prévisions sont des extrapolations : elles supposent que la croissance de 7 000 € par an continue.

Réponse. a) rang 7, environ 162 000 € — b) en 2027.

Correction de l'exercice 12 - Ranger avant de grouper

L'erreur. Les deux groupes de la méthode de Mayer doivent regrouper les points de **plus petites abscisses** d'un côté, et ceux de plus grandes abscisses de l'autre. L'élève a pris les trois premiers points dans l'ordre d'écriture, (5 ; 35), (1 ; 20), (7 ; 41), qui mélangent petites et grandes abscisses. Ses deux points moyens seraient très proches l'un de l'autre et la droite obtenue n'aurait aucun sens.

La correction. On range d'abord les points par abscisses croissantes : (1 ; 20), (2 ; 23), (3 ; 26), (5 ; 35), (6 ; 38), (7 ; 41). Puis :

$$G_1(2 ; 23) \quad G_2(6 ; 38)$$

et la droite de Mayer est $y = 3,75x + 15,5$.

Réponse. Il faut ranger par abscisses croissantes : $G_1(2 ; 23)$, $G_2(6 ; 38)$, $y = 3,75x + 15,5$.

Correction de l'exercice 13 - Interpréter les coefficients

a) Quand les dépenses augmentent de 1 (millier d'euros), les ventes estimées augmentent de 3,75 milliers d'euros. Selon ce modèle, chaque euro de publicité est associé à 3,75 € de ventes en plus.

b) Pour $x = 0$, $y = 15,5$: le modèle estime à 15 500 € les ventes sans aucune publicité. Mais aucune donnée n'a été relevée près de $x = 0$ (les dépenses vont de 1 à 7) : c'est une extrapolation, à prendre avec prudence.

c) $y = 3,75 \times 8 + 15,5 = 30 + 15,5 = 45,5$. On peut estimer les ventes à environ 45 500 €, en restant prudent puisque 8 dépasse la plus grande valeur observée.

Réponse. a) +3 750 € de ventes par millier d'euros de publicité — b) ventes estimées sans publicité, extrapolation prudente — c) environ 45 500 €.

Correction de l'exercice 14 - Comparer Mayer et une droite au jugé

a) On calcule les valeurs estimées :

$$\text{Mayer: } -20 \times 10 + 700 = 500 \quad -20 \times 20 + 700 = 300$$

$$\text{au jugé: } -18 \times 10 + 670 = 490 \quad -18 \times 20 + 670 = 310$$

La droite de Mayer s'écarte de 5 et de 0 des données, la droite au jugé de 15 et de 10.

b) Pour $p = 15$: la droite de Mayer donne $-300 + 700 = 400$, elle passe par G ; la droite au jugé donne $-270 + 670 = 400$, elle aussi. Passer par G ne suffit donc pas : la pente compte aussi, et celle de Mayer, calculée à partir des données, suit mieux le nuage.

Réponse. a) Mayer : 500 et 300 ; au jugé : 490 et 310 — b) oui, toutes les deux.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : prévoir une consommation

a) $G(5; 74)$, $G_1(2; 86)$ et $G_2(8; 62)$; la droite de Mayer a pour coefficient $\frac{62 - 86}{6} = -4$ et passe par G_1 :

$$C = -4T + 94$$

b) $C = -4 \times 3 + 94 = 82$: environ 82 kWh par jour. C'est une **interpolation**, car 3 est entre 0 et 10.

c) On résout $-4T + 94 < 60$, soit $-4T < -34$; on divise par -4 , ce qui change le sens : $T > 8,5$. Au-dessus de $8,5$ °C, la consommation devrait rester sous 60 kWh.

d) $-4 \times 30 + 94 = -26$: une consommation négative est absurde. À 30 °C, on ne chauffe plus du tout ; le modèle n'est valable que dans la plage observée.

Réponse. a) $G(5; 74)$, $C = -4T + 94$ — b) 82 kWh — c) $T > 8,5$ °C — d) absurde : hors du domaine du modèle.