

Plaquette 1 - Nuage de points et point moyen

Séries statistiques à deux variables — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Série à deux variables. À chaque individu (un mois, une entreprise, un client) on associe deux nombres x_i et y_i .

Nuage de points. L'ensemble des points $M_i(x_i; y_i)$ dans un repère. On choisit des échelles adaptées aux données ; les axes ne commencent pas forcément à 0.

Point moyen G : ses coordonnées sont les moyennes des x_i et des y_i :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \quad G(\bar{x}; \bar{y})$$

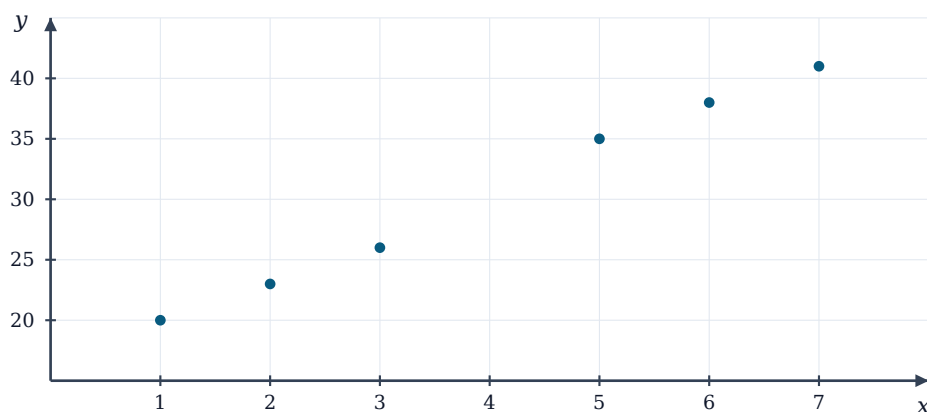
Lire la forme du nuage.

Forme du nuage	Interprétation
proche d'une droite qui monte	croissant : ajuster par une droite
proche d'une droite qui descend	décroissant : ajuster par une droite
dispersé sans direction	pas de lien affine
le long d'une courbe	droite non adaptée

Série chronologique. Quand x est une année, on la remplace souvent par son **rang**, 1 pour la première année, 2 pour la suivante, et ainsi de suite : les calculs sont plus simples.

Correction de l'exercice 1 - Construire un nuage de points

a) Chaque mois donne un point $M_i(x_i; y_i)$: (1 ; 20), (2 ; 23), (3 ; 26), (5 ; 35), (6 ; 38) et (7 ; 41). Commencer l'axe des ordonnées à 15 évite de gaspiller la moitié du graphique.



Nuage des dépenses publicitaires x et des ventes y , en milliers d'euros.

b) Les points sont presque alignés, le long d'une droite qui monte : plus la boutique dépense en publicité, plus son chiffre d'affaires est élevé. Un **ajustement affine** est donc pertinent pour décrire ce lien.

Attention : le nuage montre une tendance, il ne prouve pas que la publicité **cause** la hausse des ventes ; d'autres facteurs (saison, soldes) peuvent jouer.

Réponse. b) Points presque alignés sur une droite croissante : un ajustement affine est pertinent.

Correction de l'exercice 2 - Calculer un point moyen

Les coordonnées du point moyen sont les moyennes des deux variables. Il y a $n = 6$ mois.

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7}{6} = \frac{24}{6} = 4 \quad \bar{y} = \frac{20 + 23 + 26 + 35 + 38 + 41}{6} = \frac{183}{6} = 30,5$$

Le point moyen est $G(4; 30,5)$.

Interprétation : sur ces six mois, la boutique a dépensé en moyenne 4 000 € par mois en publicité, pour un chiffre d'affaires moyen de 30 500 €. Le point G se trouve « au centre » du nuage ; on verra qu'une bonne droite d'ajustement passe par lui.

Réponse. $G(4; 30,5)$.

Correction de l'exercice 3 - Une série chronologique

a) Le rang donne des nombres petits (1 à 6) au lieu de 2019 à 2024 : les calculs sont plus simples et les coefficients d'une droite d'ajustement plus lisibles. Le rang 1 correspond à 2019, donc le rang x correspond à l'année $2018 + x$.

b) On calcule les deux moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5 \quad \bar{y} = \frac{825}{6} = 137,5$$

car $119 + 127 + 135 + 141 + 148 + 155 = 825$. Le point moyen est $G(3,5; 137,5)$: un rang « 3,5 » se situe entre 2021 et 2022, et le chiffre d'affaires moyen sur la période est de 137 500 €.

Réponse. b) $G(3,5; 137,5)$.

Correction de l'exercice 4 - Lire un nuage de points

a) On lit les coordonnées des points :

T_i	0	2	4	6	8	10
C_i	93	86	79	70	62	54

b) Les points sont presque alignés le long d'une droite qui **descend** : plus il fait chaud dehors, moins on consomme de chauffage. Un ajustement affine décroissant est pertinent.

c) Avec $n = 6$ relevés :

$$\bar{T} = \frac{30}{6} = 5 \quad \bar{C} = \frac{93 + 86 + 79 + 70 + 62 + 54}{6} = \frac{444}{6} = 74$$

Le point moyen est $G(5; 74)$: à 5 °C en moyenne, l'immeuble consomme en moyenne 74 kWh par jour.

Réponse. b) tendance décroissante — c) $G(5; 74)$.

Correction de l'exercice 5 - Quelle tendance ?

On se demande si, quand x augmente, y a tendance à augmenter, à diminuer, ou à ne pas changer.

a) **Tendance décroissante** : plus le prix est élevé, moins on vend, en général.

b) **Tendance croissante** : plus il fait chaud, plus les glaces se vendent.

c) **Pas de lien** : le dernier chiffre d'un numéro de téléphone n'a rien à voir avec un salaire ; le nuage serait dispersé sans direction.

d) **Tendance croissante** : une machine plus ancienne demande en général davantage de réparations.

Une tendance n'est pas une règle absolue : certains points peuvent s'en écarter. C'est le nuage obtenu avec les vraies données qui permet de conclure.

Réponse. a) décroissante — b) croissante — c) pas de lien — d) croissante.

Correction de l'exercice 6 - Formation et productivité

a) On calcule les deux moyennes, avec $n = 5$:

$$\bar{x} = \frac{0 + 5 + 10 + 15 + 20}{5} = \frac{50}{5} = 10 \quad \bar{y} = \frac{40 + 46 + 50 + 57 + 62}{5} = \frac{255}{5} = 51$$

Le point moyen est $G(10; 51)$: en moyenne, 10 heures de formation et 51 pièces par heure.

b) Ce salarié produit 40 pièces par heure, soit $51 - 40 = 11$ pièces de moins que la moyenne. Les salariés les plus formés sont au-dessus de la moyenne : le nuage suggère une tendance croissante, d'environ 1,1 pièce par heure de plus pour chaque heure de formation entre les extrêmes ($\frac{62 - 40}{20} = 1,1$).

Réponse. a) $G(10; 51)$ — b) en dessous, de 11 pièces par heure.

Correction de l'exercice 7 - Surface de vente et chiffre d'affaires

a) Les surfaces vont de 2 à 12 : on peut prendre 1 cm pour 1 centaine de m^2 en abscisse, à partir de 0. Les chiffres d'affaires vont de 150 à 503 : on peut commencer l'axe des ordonnées à 100 et prendre 1 cm pour 50 milliers d'euros, ce qui donne un graphique d'environ 12 cm sur 8 cm.

b) Avec $n = 6$ magasins :

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12}{6} = \frac{42}{6} = 7 \quad \bar{y} = \frac{1980}{6} = 330$$

car $150 + 225 + 300 + 370 + 432 + 503 = 1980$. Le point moyen est $G(7; 330)$: un magasin « moyen » de 700 m^2 réalise 330 000 € de chiffre d'affaires.

Réponse. b) $G(7; 330)$.

Correction de l'exercice 8 - Un mois de plus

On ne fait pas la moyenne de l'ancien point moyen et du nouveau point : il faut repartir des **totaux**, car le nouveau mois ne pèse que pour un septième.

$$\bar{x} = \frac{24 + 8}{7} = \frac{32}{7} \approx 4,57 \quad \bar{y} = \frac{183 + 47}{7} = \frac{230}{7} \approx 32,86$$

Le nouveau point moyen est environ $G'(4,57; 32,86)$.

Il s'est déplacé vers le haut et vers la droite, car le nouveau mois a des valeurs supérieures aux moyennes précédentes. Faire la moyenne de G et du point $(8; 47)$ aurait donné $(6; 38,75)$, beaucoup trop loin.

Réponse. $G'\left(\frac{32}{7}; \frac{230}{7}\right) \approx (4,57; 32,86)$.

Correction de l'exercice 9 - Retrouver une donnée manquante

Notons y la valeur effacée. La moyenne des commandes vaut 95 sur 5 jours, donc leur total vaut $5 \times 95 = 475$:

$$\bar{y} = \frac{52 + 70 + 95 + y + 140}{5} = 95 \Leftrightarrow 357 + y = 475 \Leftrightarrow y = 118$$

Le quatrième jour, il y a eu 118 commandes.

Contrôle sur l'autre coordonnée, qui ne dépend pas de la valeur effacée :

$$\bar{x} = \frac{10 + 15 + 20 + 25 + 30}{5} = 20, \text{ conforme à l'énoncé.}$$

Réponse. 118 commandes.

Correction de l'exercice 10 - Âge d'une machine et entretien

a) Avec $n = 5$ machines :

$$\bar{x} = \frac{15}{5} = 3 \quad \bar{y} = \frac{200 + 260 + 330 + 380 + 450}{5} = \frac{1620}{5} = 324$$

Le point moyen est $G(3; 324)$.

b) Entre 1 an et 5 ans, le coût passe de 200 € à 450 €, soit une hausse de 250 € en 4 ans :

$$\frac{450 - 200}{5 - 1} = \frac{250}{4} = 62,5$$

Le coût d'entretien augmente d'environ 62,5 € par année d'âge. Ce nombre est le coefficient directeur de la droite qui relie les deux points extrêmes : c'est une première idée d'ajustement affine, que l'on améliorera ensuite.

Réponse. a) $G(3; 324)$ — b) environ 62,5 € par année.

Correction de l'exercice 11 - Un nuage sans tendance

a) On lit les huit points, de pointures 37 à 44 et de notes 12 ; 8 ; 15 ; 10 ; 14 ; 9 ; 13 ; 11 :

$$\bar{x} = \frac{37 + 38 + \dots + 44}{8} = \frac{324}{8} = 40,5 \quad \bar{y} = \frac{92}{8} = 11,5$$

Le point moyen est $G(40,5; 11,5)$.

b) Les points sont dispersés en zigzag, sans direction privilégiée : quand la pointure augmente, la note monte ou descend au hasard. Aucune droite ne peut résumer ce nuage. Un ajustement affine **n'est pas pertinent** : la pointure ne permet pas de prévoir la note, ce qui n'a rien d'étonnant.

Un point moyen se calcule toujours ; il ne suffit pas à justifier un ajustement.

Réponse. a) $G(40,5; 11,5)$ — b) non : le nuage ne présente aucune tendance.

Correction de l'exercice 12 - Un nuage en forme de courbe

a) Les points ne sont pas alignés : ils dessinent une **courbe** de plus en plus pentue. Les hausses mensuelles grandissent : +1, +2, +3, +5, puis +8 milliers d'abonnés.

b) Une droite suppose une hausse **constante** chaque mois, ce qui ne correspond pas à ces données. Par exemple, la droite qui passe par le point moyen $G(3,5; \frac{52}{6})$, environ $(3,5; 8,67)$, et par le dernier point $(6; 21)$ est trop haute pour les premiers mois et sous-estimerait la suite si la croissance continue d'accélérer.

Un ajustement affine **n'est pas adapté** ici. On utilisera plutôt un modèle de croissance en pourcentage (suite géométrique), vu dans le chapitre sur les suites.

Réponse. a) courbe de plus en plus pentue — b) non, la croissance n'est pas linéaire.

Correction de l'exercice 13 - Repérer une erreur

L'erreur. Le point moyen se calcule avec **toutes** les données, pas seulement avec les deux extrêmes. Le milieu des extrêmes ne tient pas compte des quatre autres magasins.

La correction.

$$\bar{x} = \frac{42}{6} = 7 \quad \bar{y} = \frac{150 + 225 + 300 + 370 + 432 + 503}{6} = \frac{1980}{6} = 330$$

Le point moyen est $G(7; 330)$. L'abscisse tombe juste par hasard, car les surfaces sont régulièrement espacées ; l'ordonnée, elle, est fautive de 3,5 milliers d'euros. Sur une série moins régulière, l'écart serait bien plus grand.

Réponse. $G(7; 330)$, et non $(7; 326,5)$.

Correction de l'exercice 14 - Deux moitiés d'une série

a) On coupe la série en deux groupes de même effectif, dans l'ordre des rangs.

$$G_1\left(\frac{1+2+3}{3}; \frac{119+127+135}{3}\right) = (2; 127) \quad G_2\left(\frac{4+5+6}{3}; \frac{141+148+155}{3}\right) = (5; 148)$$

b) Le milieu de $[G_1G_2]$ a pour coordonnées $\left(\frac{2+5}{2}; \frac{127+148}{2}\right) = (3,5; 137,5)$, et le point moyen de la série complète est $G(3,5; 137,5)$: c'est le même point.

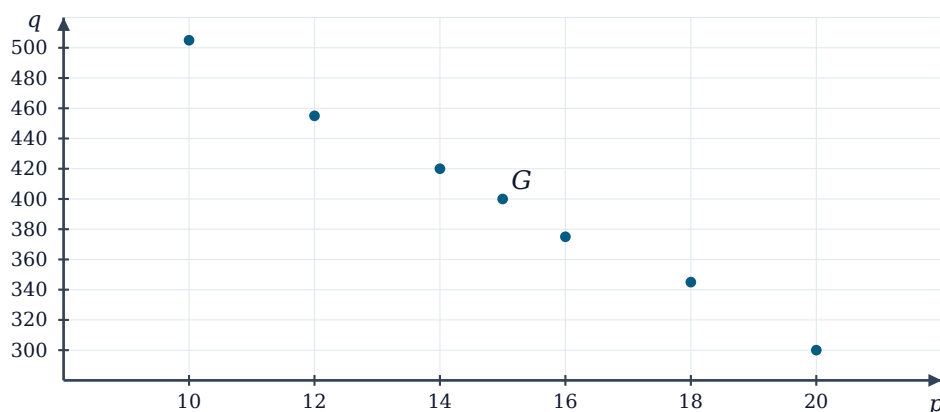
Ce n'est pas un hasard : les deux groupes ont le même effectif, donc la moyenne générale est la moyenne des deux moyennes. Ces points G_1 et G_2 servent à tracer la **droite de Mayer**, qui passe ainsi par G .

Réponse. a) $G_1(2; 127)$ et $G_2(5; 148)$ — b) milieu $(3,5; 137,5) = G$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : prix et quantités vendues

a) et b) Les points descendent régulièrement : plus le prix est élevé, moins le produit se vend. Le nuage est presque aligné, un ajustement affine décroissant est pertinent. Le point moyen :

$$\bar{p} = \frac{90}{6} = 15 \quad \bar{q} = \frac{505 + 455 + 420 + 375 + 345 + 300}{6} = \frac{2400}{6} = 400$$



Quantités vendues q selon le prix P (€), et le point moyen G .

c) La recette est le prix multiplié par la quantité : $10 \times 505 = 5050$ € à 10 €, et $20 \times 300 = 6000$ € à 20 €. Doubler le prix fait perdre des clients, mais la recette augmente quand même : la baisse des ventes (-40% environ) est moins forte que la hausse du prix ($+100\%$).

Réponse. a) tendance décroissante — b) $G(15; 400)$ — c) 5050 € et 6000 €.