

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse en gestion

Séries statistiques à deux variables — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

La démarche complète.

1. Lire les données, repérer les unités et le domaine observé. 2. Décrire le nuage : tendance, alignement, point aberrant. 3. Calculer le point moyen $G(\bar{x}; \bar{y})$. 4. Ajuster : droite de Mayer (G_1G_2), ou droite des moindres carrés de la calculatrice ; vérifier qu'elle passe par G . 5. Estimer ou résoudre :

$$y = ax + b \quad ax + b \geq k \Leftrightarrow x \geq \frac{k - b}{a} \quad (a > 0)$$

6. Critiquer : interpolation ou extrapolation, plausibilité, contraintes réelles (capacité, 100 %, valeurs positives).

Interpréter les coefficients.

Coefficient	Sens
a	variation moyenne de y quand x augmente de 1
b	valeur estimée de y pour $x = 0$, si cela a un sens

Rédiger. « D'après l'ajustement $y = \dots$, on peut estimer ... à environ ... ; cette estimation suppose que ... »

Correction de l'exercice 1 - Faut-il recruter un commercial ?

a) $\bar{x} = \frac{33}{6} = 5,5$ et $\bar{y} = \frac{1848}{6} = 308$, donc $G(5,5; 308)$. Les points moyens des deux groupes sont

$$G_1\left(4; \frac{210 + 252 + 282}{3}\right) = (4; 248) \quad G_2\left(7; \frac{332 + 368 + 404}{3}\right) = (7; 368)$$

$$a = \frac{368 - 248}{7 - 4} = 40 \text{ et } b = 248 - 40 \times 4 = 88 : \text{la droite de Mayer est } y = 40x + 88.$$

Contrôle : $40 \times 5,5 + 88 = 308$.

b) Chaque commercial supplémentaire est associé, en moyenne, à 40 000 € de chiffre d'affaires en plus.

c) Le septième commercial rapporterait environ 40 000 € de chiffre d'affaires pour un coût de 35 000 €. Le recrutement semble intéressant, mais il faut raisonner sur la **marge** dégagée par ce chiffre d'affaires, et non sur le chiffre d'affaires lui-même : si la marge est inférieure à 35 000 €, le recrutement fera perdre de l'argent.

Réponse. a) $G(5,5; 308)$, $y = 40x + 88$ — b) +40 000 € par commercial — c) intéressant seulement si la marge sur ces 40 000 € dépasse 35 000 €.

Correction de l'exercice 2 - Prix des logements et distance au centre

a) Points moyens des deux groupes :

$$G_1\left(2; \frac{4200 + 3950 + 3700}{3}\right) = (2; 3950) \quad G_2\left(5; \frac{3350 + 3050 + 2750}{3}\right) = (5; 3050)$$

$a = \frac{3050 - 3950}{5 - 2} = -300$ et $b = 3950 + 600 = 4550$: $y = -300x + 4550$. Le prix baisse d'environ 300 € par m² pour chaque kilomètre d'éloignement.

b) $y = -300 \times 4,5 + 4550 = 3200$ € par m².

c) Le budget correspond à $\frac{200\,000}{60} \approx 3333,33$ € par m². On résout $-300x + 4550 \leq 3333,33$:

$$-300x \leq -1216,67 \Leftrightarrow x \geq \frac{1216,67}{300} \approx 4,06$$

(on divise par -300 , le sens change). Le couple peut acheter à partir d'environ 4,1 km du centre.

Réponse. a) $y = -300x + 4550$ — b) 3200 €/m² — c) à partir d'environ 4,1 km.

Correction de l'exercice 3 - Temps d'attente et satisfaction

a) $\bar{x} = \frac{75}{5} = 15$ et $\bar{y} = \frac{38}{5} = 7,6$. Or $-0,168 \times 15 + 10,12 = -2,52 + 10,12 = 7,6$: la droite passe par $G(15; 7,6)$.

b) $y = -0,168 \times 12 + 10,12 = -2,016 + 10,12 = 8,104$, soit une satisfaction d'environ 8,1 sur 10.

c) On résout $-0,168x + 10,12 \geq 8$:

$$-0,168x \geq -2,12 \Leftrightarrow x \leq \frac{2,12}{0,168} \approx 12,6$$

(on divise par un nombre négatif, le sens change). Pour garder une satisfaction d'au moins 8, l'attente ne doit pas dépasser environ 12 minutes et demie. Chaque minute d'attente supplémentaire coûte environ 0,17 point de satisfaction.

Réponse. a) $G(15; 7,6)$ est sur la droite — b) environ 8,1 — c) au plus 12,6 minutes environ.

Correction de l'exercice 4 - Ensoleillement et production solaire

a) $G_1\left(5; \frac{18 + 22 + 26}{3}\right) = (5; 22)$ et $G_2\left(8; \frac{31 + 33 + 38}{3}\right) = (8; 34)$.

$$a = \frac{34 - 22}{8 - 5} = 4 \quad b = 22 - 4 \times 5 = 2$$

La droite de Mayer est $y = 4x + 2$. Le point moyen est $G\left(6,5; \frac{168}{6}\right) = (6,5; 28)$, et $4 \times 6,5 + 2 = 28$: il est sur la droite.

b) $y = 4 \times 11 + 2 = 46$ kWh. C'est une extrapolation (11 dépasse 9, la plus grande valeur observée). Les longues journées d'été sont aussi les plus chaudes, et la chaleur réduit le rendement des panneaux ; l'installation a de plus une puissance maximale. La production réelle pourrait être inférieure à 46 kWh.

Réponse. a) $y = 4x + 2$, passant par $G(6,5; 28)$ — b) environ 46 kWh, extrapolation à prendre avec prudence.

Correction de l'exercice 5 - Deux magasins, deux rythmes

a) Au rang 1 : A réalise $35 + 85 = 120$ et B $28 + 140 = 168$ milliers d'euros ; B est devant. Mais A gagne 35 milliers d'euros par an, contre 28 pour B : A progresse plus vite.

b) On résout $35x + 85 > 28x + 140$:

$$7x > 55 \Leftrightarrow x > \frac{55}{7} \approx 7,86$$

A devrait dépasser B à partir du rang 8. Contrôle : au rang 8, A réalise $35 \times 8 + 85 = 365$ et B $28 \times 8 + 140 = 364$ milliers d'euros, presque à égalité ; au rang 7, A (330) est encore derrière B (336).

Cette prévision suppose que les deux tendances se maintiennent jusqu'au rang 8.

Réponse. a) B au rang 1, A progresse plus vite — b) à partir du rang 8.

Correction de l'exercice 6 - Rentabilité d'une campagne publicitaire

a) La marge vaut 30 % des ventes, soit $0,3y$. On retranche la dépense publicitaire x :

$$B = 0,3(3,75x + 15,5) - x = 1,125x + 4,65 - x = 0,125x + 4,65$$

b) Le coefficient de x vaut 0,125 : chaque millier d'euros de publicité supplémentaire rapporte en moyenne 125 € de bénéfice en plus. La publicité est donc rentable, mais de peu : 1 000 € dépensés font gagner 1 125 € de marge.

Par exemple, $B = 0,125 \times 1 + 4,65 = 4,775$ pour 1 000 € de publicité, et $B = 0,125 \times 7 + 4,65 = 5,525$ pour 7 000 €. Au-delà de 7 000 €, on sort des données : rien ne garantit que l'effet de la publicité reste le même.

Réponse. a) $B = 0,125x + 4,65$ — b) oui, de peu : environ 125 € de bénéfice par millier d'euros dépensé.

Correction de l'exercice 7 - Prix d'une chambre et taux de remplissage

a) $\bar{x} = \frac{500}{5} = 100$ et $\bar{y} = \frac{385}{5} = 77$. Or $-0,75 \times 100 + 152 = 77$: la droite passe par $G(100; 77)$.

b) $y = -0,75 \times 105 + 152 = -78,75 + 152 = 73,25$: environ 73 % de chambres occupées.

c) On résout $-0,75x + 152 = 100$:

$$-0,75x = -52 \Leftrightarrow x = \frac{52}{0,75} \approx 69,33$$

Le modèle prévoit un hôtel complet pour environ 69 €. C'est une extrapolation (les prix testés vont de 80 à 120 €) ; et en dessous de ce prix, le modèle donnerait un taux supérieur à 100 %, ce qui est impossible.

Réponse. a) $G(100; 77)$ — b) environ 73 % — c) vers 69 €, extrapolation ; le taux ne peut pas dépasser 100 %.

Correction de l'exercice 8 - Fréquentation d'une ligne de bus

a) Points moyens :

$$G_1\left(2; \frac{1200 + 1260 + 1320}{3}\right) = (2; 1260) \quad G_2\left(5; \frac{1385 + 1435 + 1500}{3}\right) = (5; 1440)$$

$a = \frac{1440 - 1260}{3} = 60$ et $b = 1260 - 120 = 1140$: $y = 60x + 1140$. La fréquentation augmente d'environ 60 voyageurs par jour chaque année.

b) On résout $60x + 1140 > 1700$:

$$60x > 560 \Leftrightarrow x > \frac{560}{60} \approx 9,33$$

Le premier rang entier qui convient est 10, soit l'année $2018 + 10 = 2028$. Contrôle : $60 \times 9 + 1140 = 1680$ et $60 \times 10 + 1140 = 1740$.

La ligne devrait atteindre sa capacité en 2028 : c'est une extrapolation, mais elle permet d'anticiper un renfort de la ligne.

Réponse. a) $y = 60x + 1140$ — b) en 2028 (rang 10).

Correction de l'exercice 9 - Salaire et ancienneté

a) Les deux groupes ont pour points moyens

$$G_1\left(2; \frac{1800 + 1885 + 1955}{3}\right) = (2; 1880) \quad G_2\left(8; \frac{2045 + 2115 + 2200}{3}\right) = (8; 2120)$$

$$a = \frac{2120 - 1880}{8 - 2} = \frac{240}{6} = 40 \text{ et } b = 1880 - 80 = 1800 : y = 40x + 1800.$$

Le salaire augmente en moyenne de 40 € par mois pour chaque année d'ancienneté ; 1800 € est le salaire estimé à l'embauche ($x = 0$), qui correspond ici à une valeur observée.

b) $y = 40 \times 15 + 1800 = 2400$ €. C'est une extrapolation (15 dépasse 10) : la grille de salaires de l'entreprise peut changer, ou plafonner pour les plus anciens.

Réponse. a) $y = 40x + 1800$: +40 € par an, 1800 € à l'embauche — b) environ 2400 €.

Correction de l'exercice 10 - Pluie et parapluies

$$a) G_1\left(4; \frac{30 + 45 + 60}{3}\right) = (4; 45) \text{ et } G_2\left(10; \frac{76 + 93 + 110}{3}\right) = (10; 93).$$

$$a = \frac{93 - 45}{10 - 4} = \frac{48}{6} = 8 \quad b = 45 - 8 \times 4 = 13$$

La droite de Mayer est $y = 8x + 13$: chaque jour de pluie supplémentaire fait vendre environ 8 parapluies de plus.

b) $y = 8 \times 9 + 13 = 85$. Le magasin peut prévoir environ 85 parapluies, et un peu plus par prudence, car une prévision météo et un ajustement comportent tous deux une marge d'erreur. C'est une interpolation : 9 est dans le domaine observé.

Réponse. a) $y = 8x + 13$ — b) environ 85 parapluies.

Correction de l'exercice 11 - Des ventes en ligne qui progressent

$$a) G_1\left(2; \frac{48 + 55 + 62}{3}\right) = (2; 55) \text{ et } G_2\left(5; \frac{69 + 75 + 84}{3}\right) = (5; 76), \text{ d'où}$$

$$a = \frac{76 - 55}{3} = 7 \quad b = 55 - 14 = 41$$

La droite de Mayer est $y = 7x + 41$, très proche de celle des moindres carrés ($y = 7,06x + 40,8$). Les deux passent par le point moyen $G(3,5; 65,5)$.

b) 2026 correspond au rang 8 :

$$\text{Mayer: } 7 \times 8 + 41 = 97 \quad \text{moindres carrés: } 7,06 \times 8 + 40,8 = 97,28$$

Les deux estimations, environ 97 000 €, ne diffèrent que de 280 €. Ce sont des extrapolations sur deux ans.

Réponse. a) $y = 7x + 41$, très proche de $y = 7,06x + 40,8$ — b) 97 et 97,28 milliers d'euros.

Correction de l'exercice 12 - Repérer une erreur d'unité

L'erreur. L'élève a remplacé x par 4500, alors que x s'exprime en **milliers d'euros**. Il annonce ainsi près de 17 millions d'euros de ventes, pour une boutique qui vend une trentaine de milliers d'euros par mois : le résultat est absurde.

La correction. 4 500 € correspondent à $x = 4,5$:

$$y = 3,75 \times 4,5 + 15,5 = 16,875 + 15,5 = 32,375$$

Les ventes estimées sont d'environ 32 375 €.

À retenir. Avant de remplacer, on convertit la donnée dans l'unité du modèle, et on vérifie que le résultat est du même ordre de grandeur que les données.

Réponse. $x = 4,5$: environ 32 375 € de ventes.

Correction de l'exercice 13 - Exclure une période exceptionnelle

a) Avec les six mois : $\frac{40 + 43 + 12 + 49 + 52 + 55}{6} = \frac{251}{6} \approx 41,8$ milliers d'euros. Sans le troisième mois : $\frac{239}{5} = 47,8$ milliers d'euros.

b) Le troisième mois correspond à un événement exceptionnel, sans rapport avec l'activité normale : son point est très loin du nuage, presque aligné, des autres mois (environ +3 milliers d'euros par mois). Le garder tirerait la droite d'ajustement vers le bas et fausserait toutes les prévisions.

On l'**exclut** de l'ajustement, en le signalant dans la conclusion : « l'ajustement est réalisé hors période de travaux ». On n'écarte jamais une donnée simplement parce qu'elle dérange : il faut une raison identifiée, comme ici.

Réponse. a) environ 41,8 et 47,8 milliers d'euros — b) non : c'est un mois exceptionnel, à exclure en le signalant.

Correction de l'exercice 14 - Tarif d'envoi des colis

a) Chaque kilogramme supplémentaire coûte environ 1,44 € de plus. Le nombre 5,45 représente une partie fixe du tarif (prise en charge, emballage), comprise dans le prix de tout colis.

b) Avec le modèle :

$$y = 1,44 \times 3,5 + 5,45 = 5,04 + 5,45 = 10,49$$

soit environ 10,49 €. Mais si le tarif réel est par tranche, un colis de 3,5 kg est facturé comme un colis de 4 kg, soit 11,20 €.

L'ajustement affine résume bien l'évolution générale du tarif, mais la vraie grille est « en escalier » : pour un prix exact, on consulte la grille ; le modèle sert à comparer des transporteurs ou à estimer un budget.

Réponse. a) +1,44 € par kg, 5,45 € de partie fixe — b) environ 10,49 € selon le modèle, 11,20 € en réalité.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un hôtel fixe son prix

a) Le nombre de chambres occupées est $50 \times \frac{y}{100} = 0,5y$. La recette est le prix multiplié par ce nombre :

$$R(x) = x \times 0,5y = 0,5x(-0,75x + 152)$$

b) $R(80) = 40 \times 92 = 3680$ €, $R(100) = 50 \times 77 = 3850$ € et $R(120) = 60 \times 62 = 3720$ €.

c) $R(x) = 0,5x(-0,75x + 152)$ s'annule en $x = 0$ et en $x = \frac{152}{0,75} \approx 202,67$. L'axe de symétrie passe au milieu, en $x \approx 101,33$; le coefficient de x^2 est négatif ($-0,375$), c'est donc un maximum.

Le prix optimal est d'environ 101 €, pour une recette d'environ 3850 € par nuit. Ce prix

est dans le domaine étudié (80 à 120 €) : la conclusion est fiable, à condition que le lien entre prix et remplissage reste celui observé.

Réponse. b) 3680 €, 3850 €, 3720 € — c) environ 101 €, recette maximale d'environ 3850 €.