Plaquette 1 – Arithmétiques, géométriques et modèles d'évolution

Suites numériques — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— Suite **arithmétique** de raison r : chaque terme s'obtient en **ajoutant** r.

$$u_{n+1} = u_n + r \qquad u_n = u_0 + nr$$

— Suite **géométrique** de raison q : chaque terme s'obtient en **multipliant** par q.

$$u_{n+1} = q \times u_n \qquad u_n = u_0 \times q^n$$

— Reconnaître : différence constante ⇒ arithmétique ; quotient constant ⇒ géométrique.

— **Modélisation** : une évolution de $+t\,\%$ par période correspond à une suite géométrique de raison $q = 1 + \dfrac{t}{100}$; une évolution de $+c$ unités par période correspond à une suite arithmétique de raison $r = c$.

— Sens de variation : arithmétique croissante si $r > 0$; géométrique à termes positifs croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$.

— Recherche d'un **seuil** : on calcule les termes de proche en proche (tableur ou calculatrice) jusqu'à dépasser la valeur visée.

Correction de l'exercice 1 – Calculer des termes par récurrence

On applique la relation de récurrence, qui donne chaque terme à partir du précédent.

— $u_1 = u_0 + 7 = 12 + 7 = 19$.

— $u_2 = u_1 + 7 = 19 + 7 = 26$.

— $u_3 = u_2 + 7 = 26 + 7 = 33$.

— La différence entre deux termes consécutifs est constante ($+7$) : la suite est **arithmétique** de raison 7.

Réponse. $u_1 = 19$, $u_2 = 26$, $u_3 = 33$.

Correction de l'exercice 2 – Reconnaître la nature d'une suite

a) Les différences valent $17 - 12 = 5$, $22 - 17 = 5$, $27 - 22 = 5$: elles sont constantes. Suite **arithmétique** de raison $r = 5$.

b) Les quotients valent $\dfrac{6}{3} = 2$, $\dfrac{12}{6} = 2$, $\dfrac{24}{12} = 2$: ils sont constants. Suite **géométrique** de raison $q = 2$.

c) Différences : 3, 5, 7 (non constantes) ; quotients : 4, 2,25, $\approx 1{,}78$ (non constants). La suite n'est **ni** arithmétique **ni** géométrique (ce sont les carrés des entiers).

Réponse. a) arithmétique, $r = 5$ · b) géométrique, $q = 2$ · c) ni l'une ni l'autre.

Correction de l'exercice 3 – Formule explicite d'une suite arithmétique

a) Formule du cours : $u_n = u_0 + nr = 250 - 15n$.

b) $u_{12} = 250 - 15 \times 12 = 250 - 180 = 70$.

c) On résout $250 - 15n < 0$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $-15n < -250$, donc $n > \dfrac{250}{15} \approx 16{,}67$.
— Le rang étant entier, la suite devient négative à partir de $n = 17$.
— Contrôle : $u_{16} = 250 - 240 = 10 > 0$ et $u_{17} = 250 - 255 = -5 < 0$. Cohérent.

Réponse. a) $u_n = 250 - 15n$ · b) $u_{12} = 70$ · c) à partir de $n = 17$.

Correction de l’exercice 4 – Formule explicite d’une suite géométrique

a) Formule du cours : $v_n = v_0 \times q^n = 800 \times 1{,}05^n$.

b) $v_6 = 800 \times 1{,}05^6$.

— $1{,}05^6 \approx 1{,}340\,096$, donc $v_6 \approx 1\,072{,}08$.

c) Multiplier par 1,05 correspond à une **augmentation de** 5 % à chaque période : c’est par exemple un capital de 800 € placé à 5 % par an.

Réponse. a) $v_n = 800 \times 1{,}05^n$ · b) $v_6 \approx 1\,072{,}08$ · c) hausse de 5 % par période.

Correction de l’exercice 5 – Modéliser une évolution en pourcentage

a) Une hausse de 8 % correspond au coefficient $q = 1{,}08$: la suite est **géométrique**.

$$a_n = 4\,000 \times 1{,}08^n$$

b) $2028 = 2024 + 4$, donc on calcule a_4.

— $1{,}08^4 \approx 1{,}360\,489$, donc $a_4 \approx 4\,000 \times 1{,}360\,489 \approx 5\,442$ abonnés.
— Ordre de grandeur : +8 % pendant 4 ans, c’est un peu plus de +36 %. Cohérent.

Réponse. a) $a_n = 4\,000 \times 1{,}08^n$ · b) environ 5 442 abonnés.

Correction de l’exercice 6 – Modéliser une évolution constante

a) L’augmentation est de +12 **unités** (et non de 12 %) : la suite est **arithmétique** de raison 12.

$$s_n = 150 + 12n$$

b) Le 10e mois correspond à $n = 9$ (car s_0 est le premier mois) :

— $s_9 = 150 + 12 \times 9 = 150 + 108 = 258$ articles.

c) Différence essentielle : ici l’augmentation est **constante en valeur** (suite arithmétique, croissance linéaire), alors qu’un pourcentage constant donne une suite **géométrique** (croissance de plus en plus rapide).

Réponse. a) $s_n = 150 + 12n$ · b) 258 articles · c) arithmétique (hausse constante) et non géométrique.

Correction de l’exercice 7 – Deux termes connus

— Entre les rangs 2 et 6, on ajoute 4 fois la raison :

$$u_6 = u_2 + 4r \Longrightarrow 41 = 17 + 4r$$

— Donc $4r = 24$ et $r = 6$.
— Puis $u_2 = u_0 + 2r$ donne $17 = u_0 + 12$, soit $u_0 = 5$.
— Vérification : $u_2 = 5 + 12 = 17$ et $u_6 = 5 + 6 \times 6 = 41$. Les deux termes donnés sont retrouvés, donc la raison vaut 6 et le premier terme 5.

Réponse. $r = 6$ et $u_0 = 5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 8 – Sens de variation

a) Suite arithmétique de raison $r = -3 < 0$: **décroissante**.

b) Suite géométrique de premier terme positif et de raison $q = 1{,}02 > 1$: **croissante** (c’est une hausse de 2 % par période).

c) Suite géométrique de raison $q = 0{,}85$ avec $0 < q < 1$: **décroissante** (baisse de 15 % par période) ; ses termes tendent vers 0.

Réponse. a) décroissante · b) croissante · c) décroissante.

Correction de l’exercice 9 – Recherche d’un seuil

a) Suite géométrique de raison 1,03 : $C_n = 5\,000 \times 1{,}03^{\,n}$.

b) On calcule les termes demandés :

n	**5**	**6**	**7**	**8**
C_n (€)	5 796,37	5 970,26	6 149,37	6 333,85

— $C_6 \approx 5\,970{,}26 < 6\,000$ et $C_7 \approx 6\,149{,}37 > 6\,000$.

— Le capital dépasse donc 6 000 € au bout de 7 **ans**.

Réponse. a) $C_n = 5\,000 \times 1{,}03^{\,n}$ · b) au bout de 7 ans ($\approx 6\,149{,}37$ €).

Correction de l’exercice 10 – Problème : comparer deux offres

a) Placement A : suite **arithmétique**, $A_n = 2\,000 + 80n$.

— Placement B : suite **géométrique**, $B_n = 2\,000 \times 1{,}035^{\,n}$.

b) Au bout de 3 ans :

— $A_3 = 2\,000 + 240 = 2\,240$ €.

— $B_3 = 2\,000 \times 1{,}035^3 \approx 2\,217{,}44$ €. Le placement **A** est meilleur.

Au bout de 10 ans :

— $A_{10} = 2\,000 + 800 = 2\,800$ €.

— $B_{10} = 2\,000 \times 1{,}035^{10} \approx 2\,821{,}20$ €. Le placement **B** repasse devant.

— Explication : les intérêts composés portent sur un capital qui grossit, leur effet s’accélère avec le temps.

Réponse. b) À 3 ans : A (2 240 € contre $\approx 2\,217{,}44$ €) · à 10 ans : B ($\approx 2\,821{,}20$ € contre 2 800 €).

Correction de l’exercice 11 – Termes d’une suite géométrique

a) Perdre 8 %, c’est garder 92 % de la valeur : chaque année, on multiplie par le même nombre, $1 - 0{,}08 = 0{,}92$. La suite est donc géométrique, de premier terme $u_0 = 1500$ et de raison $q = 0{,}92$.

b) On multiplie chaque terme par 0,92 pour obtenir le suivant :

$$u_1 = 1500 \times 0{,}92 = 1380 \qquad u_2 = 1380 \times 0{,}92 = 1269{,}60$$

puis $u_3 = 1269{,}60 \times 0{,}92 \approx 1168{,}03$ €.

Contrôle par la formule explicite : $u_3 = 1500 \times 0{,}92^3 \approx 1168{,}03$. Réponses : géométrique de raison 0,92 ; 1380 **€**, 1269,60 **€** et ≈ 1168,03 **€**.

Réponse. a) géométrique de raison 0,92 · b) 1380 €, 1269,60 €, ≈ 1168,03 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 12 – Une hausse mensuelle constante

a) Chaque mois, on ajoute le même montant, 0,50 € : la suite est arithmétique, de premier terme $u_0 = 12$ et de raison $r = 0{,}5$.

b) La formule explicite d’une suite arithmétique est $u_n = u_0 + nr$:

$$u_n = 12 + 0{,}5n$$

Au bout de 18 mois, $u_{18} = 12 + 0{,}5 \times 18 = 12 + 9 = 21$ €.

Contrôle : $u_1 = 12{,}50$ € et $u_2 = 13$ €, soit bien 0,50 € de plus chaque mois. Réponses : arithmétique de raison 0,5 ; $u_n = 12 + 0{,}5n$ et 21 **€**.

Réponse. a) arithmétique de raison 0,5 · b) $u_n = 12 + 0{,}5n$; $u_{18} = 21$ €.

Correction de l’exercice 13 – Chercher un seuil de proche en proche

Placé à 6 %, le capital est multiplié chaque année par 1,06 : après n années, il vaut $c_n = 2000 \times 1{,}06^n$. La suite est croissante, car $1{,}06 > 1$; on calcule les termes de proche en proche jusqu’à dépasser 2500 €.

$$c_1 = 2120 \qquad c_2 = 2247{,}20 \qquad c_3 \approx 2382{,}03 \qquad c_4 \approx 2524{,}95$$

On a $c_3 < 2500 < c_4$: le capital dépasse 2500 € au bout de 4 ans. Citer les deux termes encadrants justifie que 4 est le **premier** rang qui convient.

Contrôle : $2000 \times 1{,}06^4 \approx 2524{,}95$. Le capital dépasse 2500 € **au bout de** 4 **ans**.

Réponse. Au bout de 4 ans ($c_3 \approx 2382{,}03$ € et $c_4 \approx 2524{,}95$ €).

Correction de l’exercice 14 – Nuage de points d’une suite

a) On remplace n par 0, 1, 2, 3 et 4 : 20, 17, 14, 11 et 8.

b) On retire 3 à chaque rang : les points sont **alignés**, sur une droite qui descend. La suite est arithmétique de raison -3, donc décroissante.

c) On résout $20 - 3n < 0$, soit $3n > 20$:

$$n > \frac{20}{3} \approx 6{,}67$$

Le premier rang entier qui convient est $n = 7$.

Contrôle : $u_6 = 2 \geq 0$ et $u_7 = -1 < 0$. Réponses : 20, 17, 14, 11, 8 ; points alignés, suite arithmétique de raison -3 ; **à partir de** $n = 7$.

Réponse. a) 20, 17, 14, 11, 8 · b) points alignés : arithmétique de raison -3 · c) à partir de $n = 7$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : lecture d’un tableur

— a) Suite arithmétique : chaque terme s’obtient en ajoutant la raison au précédent, donc en B3 on saisit *=B2-45*, puis on recopie vers le bas.

— b) Suite géométrique : on multiplie par la raison, donc *=B2*0,92*.

— c) 0,92 = 1 − 0,08 : cela correspond à une **baisse de** 8 % par période.

— Contrôle : avec $u_0 = 1\,200$, le cas géométrique donne $u_1 = 1\,104$, soit bien 96 de moins, c’est-à-dire 8 % de 1 200.

Réponse. a) *=B2-45* · b) *=B2*0,92* · c) une baisse de 8 % par période.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).