Plaquette 5 – Modéliser une situation de gestion

Suites numériques — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

La question qui tranche.

Formulation de l'énoncé	Modèle
« augmente de c € par mois »	arithmétique, $r = c$
« augmente de t % par mois »	géométrique, $q = 1 + \frac{t}{100}$
« perd c unités par an »	arithmétique, $r = -c$
« perd t % par an »	géométrique, $q = 1 - \frac{t}{100}$
« double chaque période »	géométrique, $q = 2$

Les quatre temps d'une modélisation.

— Nommer la suite et préciser ce que représente u_n, avec l'unité.
— Identifier u_0 et le mode d'évolution.
— Écrire la relation de récurrence **puis** la formule explicite.
— Répondre à la question posée, avec une phrase.

Bien définir le rang. « u_n est le chiffre d'affaires de l'année $2024 + n$ » évite toutes les erreurs de décalage. Préciser si u_0 correspond à la première ou à la deuxième année.

Les deux formules à connaître.

$$u_n = u_0 + nr \qquad u_n = u_0 \times q^n$$

Comparer deux modèles. On calcule les termes des deux suites dans un même tableau et on repère le rang de croisement. À long terme, une suite géométrique croissante dépasse toujours une suite arithmétique.

Contrôles de vraisemblance. Un effectif est entier et positif ; un prix ne devient pas négatif ; une croissance à taux constant sur trente ans est une hypothèse, pas une certitude.

Correction de l'exercice 1 – Choisir le bon modèle

Le critère est simple : un **montant** fixe ajouté ou retiré donne une suite arithmétique ; un **pourcentage** fixe donne une suite géométrique, de raison $1 \pm \frac{t}{100}$.

a) +25 € par an : **arithmétique**, $r = 25$, et $u_n = 800 + 25n$.
b) +2,5 % par an : **géométrique**, $q = 1{,}025$, et $u_n = 5000 \times 1{,}025^n$. Les intérêts valent 125 € la première année, puis environ 128,13 € : le montant ajouté change.
c) −80 pièces par mois : **arithmétique**, $r = -80$, et $u_n = 1200 - 80n$.
d) −1,5 % par an : **géométrique**, $q = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$.

$$u_n = 800 + 25n \qquad u_n = 40\,000 \times 0{,}985^n$$

Piège récurrent : lire un pourcentage comme un montant fixe. Réponses : arithmétique

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$r = 25$; géométrique $q = 1{,}025$; arithmétique $r = -80$; géométrique $q = 0{,}985$.

Réponse. a) arithmétique, $r = 25$ · b) géométrique, $q = 1{,}025$ · c) arithmétique, $r = -80$ · d) géométrique, $q = 0{,}985$.

Correction de l’exercice 2 – Un salaire indexé

a) Chaque revalorisation de 4,5 % multiplie le salaire par 1,045 :

$$s_n = 2800 \times 1{,}045^n$$

b) $s_3 = 2800 \times 1{,}045^3 \approx 3195{,}27$ € et $s_6 = 2800 \times 1{,}045^6 \approx 3646{,}33$ €.

c) Sur huit ans, le coefficient global vaut $1{,}045^8 \approx 1{,}4221$, soit une hausse d’environ 42,2 %. C’est plus que $8 \times 4{,}5 = 36$ %, car chaque revalorisation s’applique à un salaire déjà augmenté : la première rapporte 126 €, la huitième environ 171 €.

Contrôle : $2800 \times 1{,}045 = 2926$ €, puis environ 3057,67 € et 3195,27 €. Réponses : $s_n = 2800 \times 1{,}045^n$; ≈ 3195,27 **€** et ≈ 3646,33 **€** ; ≈ +42,21 %.

Réponse. a) $s_n = 2800 \times 1{,}045^n$ · b) ≈ 3195,27 € et 3646,33 € · c) ≈ +42,21 %.

Correction de l’exercice 3 – Un stock à écouler

a) Le stock diminue chaque mois du même nombre d’articles : suite arithmétique de raison -1400.

$$s_n = 18\,000 - 1400n$$

b) $s_6 = 18\,000 - 8400 = 9600$ articles.

c) $18\,000 - 1400n = 0$ donne $n = \dfrac{18\,000}{1400} \approx 12{,}86$: le stock ne s’épuise pas exactement à la fin d’un mois. Après 12 mois, il reste $18\,000 - 16\,800 = 1200$ articles, moins que les 1400 ventes d’un mois : le stock est épuisé **au cours du** 13^{e} **mois**, et il faut se réapprovisionner avant.

Contrôle : s_{13} vaudrait -200, ce qui signifie que la demande du treizième mois dépasse le stock restant. Réponses : $s_n = 18\,000 - 1400n$; 9600 **articles** ; au cours du 13^{e} **mois**.

Réponse. a) $s_n = 18\,000 - 1400n$ · b) 9600 articles · c) au cours du 13^{e} mois.

Correction de l’exercice 4 – Une clientèle qui s’érode

a) Perdre 7 % des abonnés, c’est en garder 93 % : on multiplie chaque année par 0,93.

$$a_n = 55\,000 \times 0{,}93^n$$

b) $a_4 = 55\,000 \times 0{,}93^4 \approx 41\,143$ abonnés.

c) La suite est décroissante. On encadre le seuil : $a_4 \approx 41\,143 > 40\,000$ et $a_5 \approx 38\,263 < 40\,000$. L’effectif passe sous 40 000 après 5 ans.

Les pertes annuelles diminuent, 3850 abonnés la première année contre environ 2880 la cinquième, et la baisse sur cinq ans, environ 30,4 %, reste inférieure à $5 \times 7 = 35$ %. Réponses : $a_n = 55\,000 \times 0{,}93^n$; ≈ 41 143 ; **après** 5 **ans**.

Réponse. a) $a_n = 55\,000 \times 0{,}93^n$ · b) environ 41 143 · c) après 5 ans.

Correction de l’exercice 5 – Une start-up en croissance

a) Une hausse de 18 % par an revient à multiplier par 1,18 :

$$u_n = 420 \times 1{,}18^n$$

en milliers d’euros.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $u_4 = 420 \times 1{,}18^4 \approx 814{,}29$ milliers d'euros.

c) La suite est croissante. On encadre le seuil de 1000 milliers d'euros : $u_5 \approx 960{,}86 < 1000$ et $u_6 \approx 1133{,}81 > 1000$. Le million est dépassé au bout de 6 ans.

En six ans, le chiffre d'affaires est presque multiplié par 2,7. Une croissance de 18 % par an sur une longue durée reste cependant très optimiste. Réponses : $u_n = 420 \times 1{,}18^n$; $\approx 814{,}29$; **au bout de** 6 **ans**.

Réponse. a) $u_n = 420 \times 1{,}18^n$ · b) $\approx 814{,}29$ · c) au bout de 6 ans.

Correction de l'exercice 6 – Deux modes de financement

a) Le premier scénario ajoute un montant fixe : $a_n = 90\,000 + 7500n$, suite arithmétique. Le second applique un taux fixe : $g_n = 90\,000 \times 1{,}09^n$, suite géométrique.

b) Après 3 ans : $a_3 = 112\,500$ € et $g_3 \approx 116\,553$ €. Après 5 ans :

$$a_5 = 127\,500 \qquad g_5 \approx 138\,476$$

soit environ 10 976 € d'écart.

c) Le second scénario est le plus favorable, et il l'est dès la première année, car 9 % de 90 000 € font 8100 €, plus que 7500 €. L'écart ne fait que se creuser, puisque la hausse géométrique s'applique chaque année à un budget plus grand.

Contrôle : $a_1 = 97\,500$ € et $g_1 = 98\,100$ €. Réponses : $90\,000 + 7500n$ et $90\,000 \times 1{,}09^n$; 112 500 **€ contre** $\approx 116\,553$ **€**, puis 127 500 **€ contre** $\approx 138\,476$ **€** ; le **second**.

Réponse. a) $90\,000 + 7500n$ et $90\,000 \times 1{,}09^n$ · b) 112 500 contre 116 553 €, puis 127 500 contre 138 476 € · c) le second.

Correction de l'exercice 7 – Un placement long

a) Le capital est multiplié chaque année par 1,025, donc par $1{,}025^{20} \approx 1{,}6386$ en vingt ans :

$$20\,000 \times 1{,}025^{20} \approx 32\,772{,}33 \text{ €}$$

b) Les intérêts valent $32\,772{,}33 - 20\,000 \approx 12\,772{,}33$ €, soit un taux global d'environ 63,9 %.

c) En intérêts simples, on toucherait chaque année 2,5 % de 20 000 €, soit 500 €, donc 10 000 € en vingt ans. Les intérêts composés rapportent environ 2772 € de plus, car les intérêts déjà acquis produisent eux-mêmes des intérêts : la vingtième année, ils rapportent environ 799 €, contre 500 €.

Réponses : $\approx 32\,772{,}33$ **€** ; $\approx 12\,772{,}33$ **€** et $\approx +63{,}86$ % ; 10 000 € d'intérêts simples, soit environ 2772,33 € de moins.

Réponse. a) $\approx 32\,772{,}33$ € · b) $\approx 12\,772{,}33$ € et +63,86 % · c) 10 000 € en simples, soit 2772,33 € de moins.

Correction de l'exercice 8 – Une production en baisse

a) Réduire de 15 %, c'est multiplier par 0,85 :

$$p_n = 3600 \times 0{,}85^n$$

b) $p_6 = 3600 \times 0{,}85^6 \approx 1358$ unités.

c) La moitié de la production initiale vaut 1800 unités. La suite est décroissante ; on calcule de proche en proche : $p_4 = 3600 \times 0{,}85^4 \approx 1879{,}22$, encore au-dessus de 1800, puis $p_5 \approx 1597{,}34$, en dessous. La production passe sous la moitié de sa valeur initiale **après** 5 **ans**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

En six ans, la baisse atteint environ 62,3 %, et non $6 \times 15 = 90$ %. La production diminue sans jamais s'annuler. Réponses : $p_n = 3600 \times 0{,}85^n$; ≈ 1358 **unités** ; **après** 5 **ans**.

Réponse. a) $p_n = 3600 \times 0{,}85^n$ · b) environ 1358 unités · c) après 5 ans ($p_5 \approx 1597$).

Correction de l'exercice 9 – Un objectif de croissance

a) Il faut que le coefficient multiplicateur sur six ans atteigne 2,5. Avec 15 % par an, on obtient $1{,}15^6 \approx 2{,}313$: c'est insuffisant. Avec 17 % :

$$1{,}17^6 \approx 2{,}565 \geq 2{,}5$$

l'objectif est atteint.

b) Diviser la hausse globale de 150 % par 6 donnerait 25 % par an. C'est beaucoup trop : $1{,}25^6 \approx 3{,}81$, l'objectif serait largement dépassé, car chaque hausse s'applique à un chiffre déjà augmenté.

c) Avec 17 %, on multiplie chaque année par 1,17 : environ 2,106, 2,464, 2,883, 3,373, 3,946 puis 4,617 millions d'euros, au-dessus de l'objectif de $1{,}8 \times 2{,}5 = 4{,}5$ millions.

Réponses : 15 % ne suffit pas, 17 % suffit ; 25 % dépasse largement l'objectif ; de 1,8 à environ 4,62 millions.

Réponse. a) 15 % ne suffit pas ($1{,}15^6 \approx 2{,}31$), 17 % suffit ($1{,}17^6 \approx 2{,}57$) · b) excessif : $1{,}25^6 \approx 3{,}81$ · c) de 2,106 à 4,617 millions.

Correction de l'exercice 10 – Un remboursement d'emprunt

a) Le capital restant dû diminue chaque mois du même montant, 400 € : suite arithmétique de raison -400.

$$c_n = 24\,000 - 400n$$

b) Deux ans font 24 mois : $c_{24} = 24\,000 - 9600 = 14\,400$ €. On a remboursé 40 % de l'emprunt.

c) L'emprunt est remboursé quand $24\,000 - 400n = 0$, soit $n = 60$ mois, c'est-à-dire 5 ans.

Sans intérêts, le coût total reste 24 000 € quelle que soit la mensualité : avec 500 € par mois, on rembourserait en 48 mois. Avec des intérêts calculés sur le capital restant, le modèle ne serait plus arithmétique.

Contrôle : $60 \times 400 = 24\,000$ €. Réponses : $c_n = 24\,000 - 400n$; 14 400 **€** ; 60 **mois**, soit 5 ans.

Réponse. a) $c_n = 24\,000 - 400n$ · b) 14 400 € · c) 60 mois, soit 5 ans.

Correction de l'exercice 11 – Deux offres d'abonnement

a) L'offre A augmente d'un montant fixe : $a_n = 50 + 3n$. L'offre B augmente d'un pourcentage fixe : $b_n = 40 \times 1{,}06^n$. On prend $n = 0$ pour le premier mois.

b) Le septième mois correspond à $n = 6$: $a_6 = 50 + 18 = 68$ € et $b_6 = 40 \times 1{,}06^6 \approx 56{,}74$ €. B reste la moins chère.

c) On poursuit de proche en proche, en comparant les deux tarifs :

$$a_{14} = 92 > b_{14} \approx 90{,}44 \qquad a_{15} = 95 < b_{15} \approx 95{,}86$$

L'offre B dépasse l'offre A à partir de $n = 15$, c'est-à-dire au 16e mois.

Ensuite, l'écart se creuse : au rang 20, A coûte 110 € et B environ 128,29 €. Réponses : $50 + 3n$ et $40 \times 1{,}06^n$; 68 **€ contre** $\approx 56{,}74$ **€** ; **à partir de** $n = 15$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) $50 + 3n$ et $40 \times 1{,}06^n$ · b) 68 € contre ≈ 56,74 € · c) à partir de $n = 15$.

Correction de l’exercice 12 – Repérer un mauvais modèle

Le modèle de l’élève ajoute chaque année 240 €, soit 3 % du capital **initial** : il suppose que les intérêts ne sont pas replacés, ce qu’on appelle des intérêts simples. Un placement qui « rapporte 3 % par an » ajoute en principe les intérêts au capital, qui rapporte alors 3 % de plus en plus. Le bon modèle est géométrique :

$$u_n = 8000 \times 1{,}03^n$$

À 10 ans, le modèle de l’élève donne $8000 + 2400 = 10\,400$ €, et le bon modèle $8000 \times 1{,}03^{10} \approx 10\,751{,}33$ €, soit environ 351 € de plus. L’écart se creuse avec le temps : à 20 ans, environ 1649 €.

Correction : il faut écrire $u_n = 8000 \times 1{,}03^n$; à 10 ans, environ 10 751,33 € au lieu de 10 400 €.

Réponse. Le bon modèle est $u_n = 8000 \times 1{,}03^n$: à 10 ans, 10 751,33 € au lieu de 10 400 €.

Correction de l’exercice 13 – Un parc de logements

a) La ville construit chaque année le même nombre de logements : suite arithmétique de raison 380.

$$L_n = 12\,500 + 380n$$

b) $L_8 = 12\,500 + 3040 = 15\,540$ logements.

c) On résout $12\,500 + 380n \geq 16\,000$, soit $380n \geq 3500$, donc $n \geq \dfrac{3500}{380} \approx 9{,}21$. Le premier entier qui convient est 10.

Le parc augmente du même nombre chaque année, mais d’un pourcentage de plus en plus faible : environ 3,04 % la première année, 2,39 % la dixième. Dans un modèle géométrique, ce pourcentage serait constant.

Contrôle : $L_9 = 15\,920 < 16\,000$ et $L_{10} = 16\,300$. Réponses : $L_n = 12\,500 + 380n$; 15 540 ; **au bout de** 10 **ans**.

Réponse. a) $L_n = 12\,500 + 380n$ · b) 15 540 · c) au bout de 10 ans.

Correction de l’exercice 14 – Comparer trois placements

a) Chaque capital est multiplié chaque année par son coefficient :

$$10\,000 \times 1{,}015^{15} \approx 12\,502 \qquad 10\,000 \times 1{,}03^{15} \approx 15\,580 \qquad 10\,000 \times 1{,}05^{15} \approx 20\,789$$

en euros.

b) Les gains valent environ 2502 €, 5580 € et 10 789 €. Doubler le taux, de 1,5 % à 3 %, fait plus que doubler le gain, qui est multiplié par environ 2,23 ; passer de 3 % à 5 % multiplie le taux par 1,67, mais le gain par environ 1,93. La capitalisation amplifie les écarts de taux.

Les durées de doublement sont d’environ 47, 23 et 14 ans. Sur le long terme, chaque point de taux compte énormément. Réponses : ≈ 12 502 **€**, 15 580 **€** et 20 789 **€** ; les gains croissent plus vite que les taux.

Réponse. a) ≈ 12 502 €, 15 580 € et 20 789 € · b) les gains sont dans un rapport bien supérieur à celui des taux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Un modèle mixte

a) Chaque année, le capital est d’abord multiplié par 1,04 (les intérêts), puis augmenté de 500 € (le versement) :

$$u_{n+1} = 1{,}04\,u_n + 500 \qquad u_0 = 6000$$

b) $u_1 = 6000 \times 1{,}04 + 500 = 6740$ €, puis $u_2 = 6740 \times 1{,}04 + 500 = 7509{,}60$ € et $u_3 \approx 8309{,}98$ €.

c) Les différences successives valent 740, 769,60 et 800,38 : elles ne sont pas constantes, la suite n’est pas arithmétique. Les quotients valent environ 1,123 puis 1,114 : elle n’est pas géométrique non plus.

Pour une telle suite, on calcule les termes de proche en proche, par exemple au tableur avec la formule $= B2 * 1,04 + 500$ recopiée vers le bas. Réponses : $u_{n+1} = 1{,}04u_n + 500$; 6740, 7509,60, 8309,98 € ; **ni arithmétique ni géométrique**.

Réponse. a) $u_{n+1} = 1{,}04u_n + 500$ · b) 6740, 7509,60, 8309,98 € · c) ni arithmétique ni géométrique.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : un plan à cinq ans

a) Le scénario A ajoute un montant fixe : $a_n = 850\,000 + 60\,000n$, arithmétique. Le scénario B applique un taux fixe : $b_n = 850\,000 \times 1{,}06^n$, géométrique.

b) Après 5 ans : $a_5 = 1\,150\,000$ € et $b_5 = 850\,000 \times 1{,}06^5 \approx 1\,137\,492$ €. A est encore légèrement devant.

c) La première année, A ajoute 60 000 €, alors que 6 % de 850 000 € ne font que 51 000 € : A est plus favorable, avec 910 000 € contre 901 000 €.

d) Au bout de 10 ans, $a_{10} = 1\,450\,000$ € et $b_{10} \approx 1\,522\,221$ € : B l’emporte. Le croisement a lieu entre la sixième et la septième année :

$$a_6 = 1\,210\,000 > b_6 \approx 1\,205\,741 \qquad a_7 = 1\,270\,000 < b_7 \approx 1\,278\,086$$

Réponses : $850\,000 + 60\,000n$ et $850\,000 \times 1{,}06^n$; 1 150 000 **€ contre** ≈ 1 137 492 **€** ; **A** ; **B**, dès $n = 7$.

Réponse. a) $850\,000 + 60\,000n$ et $850\,000 \times 1{,}06^n$ · b) 1 150 000 € contre ≈ 1 137 492 € · c) A · d) B, dès $n = 7$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).