

Plaqueette 2 – Suites arithmétiques : reconnaître, calculer, modéliser

Suites numériques — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. La suite (u_n) est arithmétique de raison r si

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Formule explicite. Elle permet de calculer directement n'importe quel terme :

$$u_n = u_0 + nr$$

Ce qu'on connaît	Ce qu'on calcule
u_0 et r	n'importe quel u_n
deux termes consécutifs	$r = u_{n+1} - u_n$
u_0 et u_n	$r = \frac{u_n - u_0}{n}$

Reconnaître une suite arithmétique. On calcule les différences successives $u_1 - u_0, u_2 - u_1, \dots$: elles doivent être **toutes égales**.

Sens de variation.

Signe de r	Variation
$r > 0$	croissante
$r < 0$	décroissante
$r = 0$	constante

Représentation graphique. Les points sont **alignés** : une suite arithmétique se comporte comme une fonction affine de n , de coefficient directeur r .

Modélisation type. Une grandeur qui augmente de c unités par période se modélise par une suite arithmétique de raison $r = c$.

Attention. « Augmenter de 50 € par mois » donne une suite arithmétique ;
« augmenter de 5 % par mois » donne une suite **géométrique**. Ne pas confondre montant constant et taux constant.

Correction de l'exercice 1 – Calculer des termes

a) **Relation de récurrence** : $u_{n+1} = u_n + 7$ ✓

— **Calcul de u_1** : $5 + 7$ ✓

— **Valeur** : 12 ✓

— **Calcul de u_2** : $12 + 7$ ✓

— **Valeur** : 19 ✓

— **Calcul de u_3** : $19 + 7$ ✓

— **Valeur** : 26 ✓

— **Calcul de u_4** : $26 + 7$ ✓

— **Valeur** :

$$u_4 = 33$$

- **Contrôle par la formule explicite** : $5 + 4 \times 7$ ✓
- **Valeur** : 33 ✓
- **Concordance** ✓

b) **Formule explicite** : $u_n = 5 + 7n$ ✓

- **Substitution** : $5 + 7 \times 10$ ✓
- **Produit** : 70 ✓
- **Résultat** :

$$u_{10} = 75$$

- **Intérêt de la formule** : éviter dix calculs successifs ✓
- **Sens de variation** : croissante, car $r > 0$ ✓
- **Valeur de u_{100}** : $5 + 700 = 705$ ✓
- **Rang où la suite dépasse 200** : $5 + 7n > 200$ ✓
- **Résolution** : $7n > 195$, donc $n > 27,857$ ✓
- **Premier rang** : $n = 28$ ✓
- **Contrôle** : $u_{28} = 201$ ✓

Réponse. a) 12, 19, 26, 33 · b) $u_{10} = 75$.

Correction de l'exercice 2 - Une raison négative

a) **Calcul de v_1** : $120 - 15$ ✓

- **Valeur** : 105 ✓
- **Calcul de v_2** : $105 - 15$ ✓
- **Valeur** : 90 ✓
- **Calcul de v_3** : $90 - 15$ ✓
- **Valeur** :

$$v_3 = 75$$

- **Sens de variation** : décroissante, car $r < 0$ ✓

b) **Formule explicite** : $v_n = 120 - 15n$ ✓

- **Condition** : $120 - 15n < 0$ ✓
- **On retranche 120** : $-15n < -120$ ✓
- **On divise par -15** : le sens change ✓
- **Solutions** : $n > 8$ ✓
- **Premier rang entier** :

$$n = 9$$

- **Contrôle** : $v_9 = 120 - 135 = -15$ ✓
- **Contrôle de v_8** : $120 - 120 = 0$ ✓
- **Constat** : v_8 est nul, pas négatif ✓
- **Cohérence avec l'inégalité stricte** ✓
- **Valeur de v_{20}** : $120 - 300 = -180$ ✓
- **Interprétation d'une telle suite** : un stock qui s'épuise ✓
- **Durée avant rupture** : 8 périodes ✓

Réponse. a) 105, 90, 75 · b) à partir de $n = 9$.

Correction de l'exercice 3 - Retrouver la raison

a) **Formule** : $u_6 = u_0 + 6r$ ✓

— **Substitution** : $47 = 11 + 6r$ ✓

— **On retranche 11** : $36 = 6r$ ✓

— **Raison** :

$$r = 6$$

— **Contrôle** : $11 + 6 \times 6 = 47$ ✓

— **Concordance** ✓

b) **Formule explicite** : $u_n = 11 + 6n$ ✓

— **Calcul de u_9** : $11 + 6 \times 9$ ✓

— **Produit** : 54 ✓

— **Résultat** :

$$u_9 = 65$$

— **Contrôle par récurrence depuis u_6** : $47 + 6 = 53$ ✓

— **Puis** : 59 ✓

— **Puis** : 65 ✓

— **Concordance** ✓

— **Sens de variation** : croissante ✓

— **Valeur de u_{15}** : $11 + 90 = 101$ ✓

— **Rang où $u_n = 137$** : $11 + 6n = 137$ ✓

— **Résolution** : $6n = 126$, donc $n = 21$ ✓

— **Contrôle** : $11 + 126 = 137$ ✓

— **Formule générale de la raison** : $r = \frac{u_p - u_0}{p}$ ✓

Réponse. a) $r = 6$ · b) $u_n = 11 + 6n$ et $u_9 = 65$.

Correction de l'exercice 4 - Reconnaître une suite arithmétique

— **Méthode** : calculer les différences successives ✓

a) **Différences** : 5, 5, 5, 5 ✓

— **Constat** : toutes égales ✓

— **Verdict** : **arithmétique**, de raison 5 ✓

— **Formule explicite** : $u_n = 3 + 5n$ ✓

b) **Différences** : 4, 12, 36 ✓

— **Constat** : elles varient ✓

— **Verdict** : **non** arithmétique ✓

— **Test du quotient** : 3, 3, 3 ✓

— **Nature réelle** : géométrique de raison 3 ✓

c) **Différences** : -6, -6, -6 ✓

— **Verdict** : **arithmétique**, de raison -6 ✓

— **Formule explicite** : $u_n = 40 - 6n$ ✓

— **Sens de variation** : décroissante ✓

d) **Différences** : 3, 4, 5 ✓

- **Constat** : elles augmentent ✓
- **Verdict** : **non** arithmétique ✓
- **Test du quotient** : 1,6 puis 1,5 ✓
- **Constat** : pas géométrique non plus ✓
- **Bilan** : deux suites arithmétiques sur quatre ✓
- **Terme suivant de a)** : 28 ✓
- **Terme suivant de c)** : 16 ✓

Réponse. a) oui, $r = 5$ · b) non (géométrique) · c) oui, $r = -6$ · d) non.

Correction de l'exercice 5 - Un abonnement

a) **Montant à l'inscription** : 45 € ✓

— **Valeur de u_0** :

$$45$$

— **Versement mensuel** : 28 € ✓

— **Raison** :

$$r = 28$$

— **Nature** : suite arithmétique ✓

— **Justification** : le montant ajouté est constant ✓

b) **Formule** : $u_n = u_0 + nr$ ✓

— **Expression** :

$$u_n = 45 + 28n$$

— **Contrôle pour $n = 1$** : 73 € ✓

— **Contrôle pour $n = 2$** : 101 € ✓

c) **Douze mois** : $n = 12$ ✓

— **Calcul** : $45 + 28 \times 12$ ✓

— **Produit** : 336 ✓

— **Résultat** :

$$u_{12} = 381 \text{ €}$$

— **Coût moyen mensuel** : $\frac{381}{12}$ ✓

— **Valeur** : 31,75 € ✓

— **Comparaison avec 28 €** : l'inscription alourdit le coût moyen ✓

— **Coût moyen sur deux ans** : $\frac{717}{24}$ ✓

— **Valeur** : 29,875 € ✓

— **Interprétation** : il se rapproche de 28 € ✓

— **Rang où le total dépasse 1000 €** : $28n > 955$ ✓

— **Résolution** : $n > 34,1$, donc $n = 35$ ✓

Réponse. a) $u_0 = 45$ et $r = 28$ · b) $u_n = 45 + 28n$ · c) 381 €.

Correction de l'exercice 6 - Un amortissement linéaire

a) **Valeur initiale** : 36 000 € ✓

— **Perte annuelle constante** : 4500 € ✓

— **Nature** : suite arithmétique ✓

— **Raison** : -4500 ✓

— **Formule explicite** :

$$v_n = 36\,000 - 4500n$$

b) **Substitution** : $36\,000 - 4500 \times 5$ ✓

— **Produit** : $22\,500$ ✓

— **Résultat** :

$$v_5 = 13\,500 \text{ €}$$

— **Part de la valeur initiale** : $37,5\%$ ✓

— **Dépréciation cumulée** : $22\,500 \text{ €}$ ✓

c) **Équation** : $36\,000 - 4500n = 0$ ✓

— **On ajoute** $4500n$: $36\,000 = 4500n$ ✓

— **Division** : $n = \frac{36\,000}{4500}$ ✓

— **Résultat** :

$$n = 8 \text{ ans}$$

— **Contrôle** : $v_8 = 36\,000 - 36\,000 = 0$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Taux d'amortissement annuel** : $\frac{4500}{36\,000}$ ✓

— **Valeur** : $12,5\%$ de la valeur d'origine ✓

— **Contrôle** : $\frac{1}{8} = 12,5\%$ ✓

— **Valeur après 3 ans** : $22\,500 \text{ €}$ ✓

— **Différence avec l'amortissement dégressif** : ce dernier serait géométrique ✓

Réponse. a) $v_n = 36\,000 - 4500n$ · b) $13\,500 \text{ €}$ · c) au bout de 8 ans.

Correction de l'exercice 7 - Deux termes connus

a) **Écart de rangs** : $8 - 3$ ✓

— **Valeur** : 5 ✓

— **Écart de valeurs** : $64 - 29$ ✓

— **Valeur** : 35 ✓

— **Raison** : $\frac{35}{5}$ ✓

— **Résultat** :

$$r = 7$$

— **Justification** : $u_8 = u_3 + 5r$ ✓

b) **Relation** : $u_3 = u_0 + 3r$ ✓

— **Substitution** : $29 = u_0 + 21$ ✓

— **Résultat** :

$$u_0 = 8$$

— **Formule explicite** :

$$u_n = 8 + 7n$$

— **Contrôle pour** $n = 3$: $8 + 21 = 29$ ✓

— **Contrôle pour** $n = 8$: $8 + 56 = 64$ ✓

- **Les deux concordent** ✓
- **Valeur de u_{12}** : $8 + 84 = 92$ ✓
- **Valeur de u_{20}** : $8 + 140 = 148$ ✓
- **Rang où u_n dépasse 200** : $7n > 192$ ✓
- **Résolution** : $n > 27,43$, donc $n = 28$ ✓
- **Contrôle** : $u_{28} = 8 + 196 = 204$ ✓
- **Formule générale** : $r = \frac{u_q - u_p}{q - p}$ ✓

Réponse. a) $r = 7$ · b) $u_0 = 8$ et $u_n = 8 + 7n$.

Correction de l'exercice 8 - Représentation graphique

a) **Calcul de u_0** : 6 ✓

- **Calcul de u_1** : 10 ✓
- **Calcul de u_2** : 14 ✓
- **Calcul de u_3** : 18 ✓
- **Calcul de u_4** :

22

- **Différences successives** : 4 à chaque fois ✓

b) **Points obtenus** : (0 ; 6), (1 ; 10), (2 ; 14), (3 ; 18), (4 ; 22) ✓

- **Constat** : les points sont **alignés** ✓
- **Justification** : la différence est constante ✓
- **Pente de l'alignement** : 4 ✓
- **Ordonnée à l'origine** :

6

c) **Fonction associée** : $f(x) = 4x + 6$ ✓

- **Nature** : affine ✓
- **Coefficient directeur** : la raison r ✓
- **Ordonnée à l'origine** : le premier terme u_0 ✓
- **Différence entre la suite et la fonction** : la suite n'existe que pour n entier ✓
- **Conséquence graphique** : des points isolés, pas une droite continue ✓
- **Contrôle** : $f(2,5) = 16$ n'a pas de sens pour la suite ✓
- **Valeur de u_{10}** : 46 ✓
- **Rang où $u_n = 106$** : $4n = 100$, donc $n = 25$ ✓
- **Toute suite arithmétique** : son nuage est aligné ✓

Réponse. a) 6, 10, 14, 18, 22 · b) points alignés · c) $f(x) = 4x + 6$.

Correction de l'exercice 9 - Un plan d'épargne

a) **Capital initial** : 2000 € ✓

- **Versement mensuel constant** : 150 € ✓
- **Nature** : suite arithmétique ✓
- **Formule explicite** :

$$c_n = 2000 + 150n$$

b) **Substitution** : $2000 + 150 \times 18$ ✓

- **Produit** : 2700 ✓

— **Résultat :**

$$c_{18} = 4700 \text{ €}$$

— **Versements cumulés :** 2700 € ✓c) **Inéquation :** $2000 + 150n \geq 8000$ ✓— **On retranche 2000 :** $150n \geq 6000$ ✓— **Division :** $n \geq 40$ ✓— **Résultat :**

40 mois

— **Contrôle :** $c_{40} = 2000 + 6000 = 8000 \text{ €}$ ✓— **Concordance** ✓— **Durée en années :** 3 ans et 4 mois ✓— **Effet d'un versement porté à 200 € :** $200n \geq 6000$ ✓— **Résultat :** 30 mois ✓— **Gain de temps :** 10 mois ✓— **Limite du modèle :** un vrai placement rapporte des intérêts ✓— **Avec intérêts :** la suite deviendrait plus complexe ✓— **Capital après 5 ans sans intérêts :** $2000 + 9000 = 11\,000 \text{ €}$ ✓

Réponse. a) $c_n = 2000 + 150n$ · b) 4700 € · c) au bout de 40 mois.

Correction de l'exercice 10 - Deux suites à comparer

a) **Calcul de u_0 :** 200 ✓— **Calcul de v_0 :** 380 ✓— **Comparaison :** $v_0 > u_0$ ✓— **Calcul de u_5 :** $200 + 175$ ✓— **Valeur :** 375 ✓— **Calcul de v_5 :** $380 + 75$ ✓— **Valeur :**

455

— **Comparaison :** v_5 reste supérieure ✓b) **Inéquation :** $200 + 35n > 380 + 15n$ ✓— **On retranche $15n$:** $200 + 20n > 380$ ✓— **On retranche 200 :** $20n > 180$ ✓— **Division :** $n > 9$ ✓— **Premier rang entier :**

$n = 10$

— **Contrôle pour $n = 9$:** $u_9 = 515$ et $v_9 = 515$ ✓— **Constat :** égalité exacte ✓— **Contrôle pour $n = 10$:** $u_{10} = 550$ et $v_{10} = 530$ ✓— **Vérification :** $u_{10} > v_{10}$ ✓— **Concordance** ✓— **Interprétation :** u part de plus bas mais croît plus vite ✓— **Écart de raisons :** 20 ✓— **Écart initial :** 180 ✓

- **Rang de croisement** : $\frac{180}{20} = 9 \checkmark$
- **Écart au rang 20** : $u_{20} - v_{20} = 900 - 680 = 220 \checkmark$

Réponse. a) 200, 380, 375, 455 · b) à partir de $n = 10$.

Correction de l'exercice 11 - Un stock qui diminue

a) **Stock initial** : 2400 $\checkmark$

- **Sortie hebdomadaire constante** : 180 $\checkmark$
- **Raison** : -180 $\checkmark$
- **Formule explicite** :

$$s_n = 2400 - 180n$$

b) **Substitution** : $2400 - 180 \times 8 \checkmark$

- **Produit** : 1440 $\checkmark$
- **Résultat** :

$$s_8 = 960 \text{ pièces}$$

c) **Inéquation** : $2400 - 180n < 300 \checkmark$

- **On retranche 2400** : $-180n < -2100 \checkmark$
- **Division par -180** : le sens change $\checkmark$
- **Solutions** : $n > \frac{2100}{180} \checkmark$
- **Valeur approchée** : 11,67 $\checkmark$
- **Premier rang entier** :

$$n = 12 \text{ semaines}$$

- **Contrôle pour $n = 11$** : $2400 - 1980 = 420 \checkmark$
- **Verdict** : encore suffisant $\checkmark$
- **Contrôle pour $n = 12$** : $2400 - 2160 = 240 \checkmark$
- **Verdict** : insuffisant $\checkmark$
- **Concordance** $\checkmark$
- **Rupture totale** : $\frac{2400}{180} \approx 13,33 \checkmark$
- **Semaine de rupture** : la 14^e $\checkmark$
- **Réapprovisionnement à prévoir** : avant la 12^e semaine $\checkmark$

Réponse. a) $s_n = 2400 - 180n$ · b) 960 pièces · c) à la 12^e semaine.

Correction de l'exercice 12 - Compléter un tableau

- a) **Écart de rangs** : $5 - 2 = 3 \checkmark$
- **Écart de valeurs** : $32 - 17 \checkmark$
 - **Valeur** : 15 $\checkmark$
 - **Raison** : $\frac{15}{3} \checkmark$
 - **Résultat** :

$$r = 5$$

b) **Relation** : $u_2 = u_0 + 2r \checkmark$

- **Substitution** : $17 = u_0 + 10 \checkmark$
- **Résultat** :

$$u_0 = 7$$

- **Formule explicite** : $u_n = 7 + 5n$ ✓
- **Calcul de u_9** : $7 + 45$ ✓
- **Résultat** :

$$u_9 = 52$$

- **Contrôle depuis u_5** : $32 + 4 \times 5$ ✓
- **Valeur** : 52 ✓
- **Concordance** ✓
- **Termes intermédiaires** : $u_3 = 22$, $u_4 = 27$ ✓
- **Contrôle** : $u_5 = 32$ ✓
- **Termes u_6 à u_8** : 37, 42, 47 ✓
- **Contrôle** : $u_9 = 52$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Rang où $u_n = 107$** : $5n = 100$, donc $n = 20$ ✓

Réponse. a) $r = 5$ · b) $u_0 = 7$ et $u_9 = 52$.

Correction de l'exercice 13 - Arithmétique ou non ?

- **Critère** : l'ajout doit être un **montant constant** ✓

a) **Ajout annuel** : 40 € ✓

- **Constat** : montant constant ✓
- **Verdict** :

arithmétique, $r = 40$

- **Formule** : $u_n = 1900 + 40n$ ✓

b) **Ajout annuel** : 3 % du capital ✓

- **Constat** : le montant ajouté **augmente** chaque année ✓
- **Première année** : 150 € ✓
- **Deuxième année** : 154,50 € ✓
- **Verdict** : **non** arithmétique ✓
- **Nature réelle** : géométrique de raison 1,03 ✓

c) **Perte annuelle** : 120 habitants ✓

- **Constat** : montant constant ✓
- **Verdict** :

arithmétique, $r = -120$

d) **Baisse annuelle** : 10 % du prix ✓

- **Constat** : le montant retiré diminue ✓
- **Verdict** : **non** arithmétique ✓
- **Nature réelle** : géométrique de raison 0,9 ✓
- **Règle** : un **taux** constant donne une suite géométrique ✓
- **Et** : un **montant** constant donne une suite arithmétique ✓
- **Bilan** : deux cas arithmétiques sur quatre ✓
- **Piège fréquent** : lire « 3 % » comme un montant fixe ✓

Réponse. a) oui · b) non · c) oui · d) non.

Correction de l'exercice 14 - Un tarif progressif

a) **Coût de la première heure** : 120 € ✓

— **Coût par heure supplémentaire** : 85 € ✓

— **Formule explicite** :

$$c_n = 120 + 85n$$

— **Attention** : n compte les heures **supplémentaires** ✓

b) **Six heures au total** : $n = 5$ ✓

— **Calcul** : $120 + 85 \times 5$ ✓

— **Produit** : 425 ✓

— **Résultat** :

$$c_5 = 545 \text{ €}$$

— **Coût moyen horaire** : $\frac{545}{6}$ ✓

— **Valeur approchée** : $\approx 90,83$ € ✓

c) **Inéquation** : $120 + 85n \leq 800$ ✓

— **On retranche 120** : $85n \leq 680$ ✓

— **Division** : $n \leq 8$ ✓

— **Heures supplémentaires** : 8 ✓

— **Durée totale** :

9 heures

— **Contrôle** : $120 + 680 = 800$ € ✓

— **Budget épuisé exactement** ✓

— **Contrôle pour 10 heures** : $120 + 765 = 885$ € ✓

— **Dépassement** : 85 € ✓

— **Coût moyen à 9 heures** : $\approx 88,89$ € ✓

— **Interprétation** : le coût moyen baisse avec la durée ✓

— **Limite** : il tend vers 85 € ✓

Réponse. a) $c_n = 120 + 85n$ · b) 545 € · c) 9 heures au total.

Correction de l'exercice 15 - Repérer une erreur

— **Affirmation** : la suite serait arithmétique de raison 5 ✓

— **Ce que donnerait ce modèle** : 100, 105, 110, 115 ✓

— **Calcul réel avec +5 %** : 100, 105, 110,25, 115,7625 ✓

— **Comparaison au rang 2** : 110,25 contre 110 ✓

— **Écart** : 0,25 ✓

— **Constat** : le modèle arithmétique sous-estime ✓

— **Différences réelles** : 5, 5,25, 5,5125 ✓

— **Constat** : elles ne sont pas constantes ✓

— **Conclusion** : la suite n'est **pas** arithmétique ✓

— **Nature correcte** :

géométrique de raison 1,05

— **Formule explicite** : $u_n = 100 \times 1,05^n$ ✓

— **Contrôle pour $n = 3$** : $\approx 115,76$ ✓

- **Concordance** ✓
- **Quotients successifs** : 1,05 à chaque fois ✓
- **Confirmation** ✓
- **Écart au rang 10** : 162,89 contre 150 ✓
- **Différence** : près de 13 ✓
- **Leçon** : un pourcentage constant n'est jamais arithmétique ✓
- **Cas où le raccourci passe** : sur une ou deux périodes, l'écart est faible ✓

Réponse. La suite est géométrique de raison 1,05, pas arithmétique.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : trois modèles

a) **Offre A** :

$$a_n = 500 + 90n$$

— **Offre B** :

$$b_n = 200 + 130n$$

— **Offre C** :

$$c_n = 1400 + 40n$$

— **Nature** : trois suites arithmétiques ✓

b) **Coût de A sur 12 mois** : $500 + 1080$ ✓

— **Valeur** : 1580 € ✓

— **Coût de B** : $200 + 1560$ ✓

— **Valeur** : 1760 € ✓

— **Coût de C** : $1400 + 480$ ✓

— **Valeur** :

$$1880 \text{ €}$$

— **Classement à 12 mois** : A, puis B, puis C ✓

c) **Inéquation** : $500 + 90n < 200 + 130n$ ✓

— **On retranche** $90n$: $500 < 200 + 40n$ ✓

— **On retranche** 200 : $300 < 40n$ ✓

— **Division** : $n > 7,5$ ✓

— **Premier rang entier** :

$$n = 8 \text{ mois}$$

— **Contrôle à 8 mois** : 1220 € contre 1240 € ✓

d) **Inéquation** : $1400 + 40n < 500 + 90n$ ✓

— **On retranche** $40n$: $1400 < 500 + 50n$ ✓

— **On retranche** 500 : $900 < 50n$ ✓

— **Division** : $n > 18$ ✓

— **Premier rang entier** :

$$n = 19 \text{ mois}$$

— **Contrôle à 19 mois** : 2160 € contre 2210 € ✓

— **Conclusion générale** : B jusqu'à 7 mois, A de 8 à 18, C ensuite ✓

— **Coût à 24 mois** : A 2660 €, B 3320 €, C 2360 € ✓

Réponse. a) $500 + 90n$, $200 + 130n$, $1400 + 40n$ · b) 1580, 1760 et 1880 € · c) dès 8 mois

- d) dès 19 mois.