Plaquette 2 – Suites arithmétiques : reconnaître, calculer, modéliser

Suites numériques — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. La suite (u_n) est arithmétique de raison r si

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Formule explicite. Elle permet de calculer directement n'importe quel terme :

$$u_n = u_0 + nr$$

Ce qu'on connaît	Ce qu'on calcule
u_0 et r	n'importe quel u_n
deux termes consécutifs	$r = u_{n+1} - u_n$
u_0 et u_n	$r = \dfrac{u_n - u_0}{n}$

Reconnaître une suite arithmétique. On calcule les différences successives $u_1 - u_0$, $u_2 - u_1$, … : elles doivent être **toutes égales**.

Sens de variation.

Signe de r	Variation
$r > 0$	croissante
$r < 0$	décroissante
$r = 0$	constante

Représentation graphique. Les points sont **alignés** : une suite arithmétique se comporte comme une fonction affine de n, de coefficient directeur r.

Modélisation type. Une grandeur qui augmente de c unités par période se modélise par une suite arithmétique de raison $r = c$.

Attention. « Augmenter de 50 € par mois » donne une suite arithmétique ; « augmenter de 5 % par mois » donne une suite **géométrique**. Ne pas confondre montant constant et taux constant.

Correction de l'exercice 1 – Calculer des termes

a) Dans une suite arithmétique de raison 7, on passe d'un terme au suivant en ajoutant 7 : $u_1 = 5 + 7 = 12$, $u_2 = 19$, $u_3 = 26$ et $u_4 = 33$.

b) Pour éviter dix additions, on utilise la formule explicite $u_n = u_0 + nr = 5 + 7n$:

$$u_{10} = 5 + 7 \times 10 = 75$$

La raison est positive, donc la suite est croissante. **Contrôle** : la formule donne aussi $u_4 = 5 + 4 \times 7 = 33$, comme le calcul pas à pas. Réponses : 12, 19, 26, 33 ; $u_{10} = 75$.

Réponse. a) 12, 19, 26, 33 · b) $u_{10} = 75$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Une raison négative

a) La raison vaut -15 : on retire 15 à chaque étape, d'où $v_1 = 105$, $v_2 = 90$ et $v_3 = 75$. La suite est décroissante.

b) La formule explicite est $v_n = 120 - 15n$. On cherche les rangs où le terme est strictement négatif :

$$120 - 15n < 0 \Leftrightarrow 15n > 120 \Leftrightarrow n > 8$$

Le premier rang entier est donc $n = 9$. Pour $n = 8$, le terme vaut exactement 0, qui n'est pas négatif.

Contrôle : $v_9 = 120 - 135 = -15 < 0$. Réponses : 105, 90, 75 ; la suite devient négative **à partir de** $n = 9$.

Réponse. a) 105, 90, 75 · b) à partir de $n = 9$.

Correction de l'exercice 3 – Retrouver la raison

a) Entre u_0 et u_6, on ajoute six fois la raison : $u_6 = u_0 + 6r$. On résout

$$47 = 11 + 6r \Leftrightarrow 6r = 36 \Leftrightarrow r = 6$$

b) La formule explicite est $u_n = 11 + 6n$, d'où $u_9 = 11 + 54 = 65$.

On peut aussi repartir de $u_6 = 47$ et ajouter trois fois la raison : 53, 59, puis 65.

Contrôle : $11 + 6 \times 6 = 47$. Réponses : $r = 6$; $u_n = 11 + 6n$ et $u_9 = 65$.

Réponse. a) $r = 6$ · b) $u_n = 11 + 6n$ et $u_9 = 65$.

Correction de l'exercice 4 – Reconnaître une suite arithmétique

Une suite est arithmétique si l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre : on calcule les différences successives.

a) Les différences valent 5, 5, 5 et 5 : la suite est **arithmétique** de raison 5.

b) Les différences valent 4, 12 et 36 : la suite n'est **pas** arithmétique. On passe en revanche d'un terme au suivant en multipliant par 3 : elle est géométrique.

c) Les différences valent -6, -6 et -6 : la suite est **arithmétique** de raison -6, décroissante.

d) Les différences valent 3, 4 et 5 : elles ne sont pas constantes, la suite n'est **pas** arithmétique. Les quotients, $\frac{8}{5} = 1{,}6$ puis $\frac{12}{8} = 1{,}5$, ne sont pas constants non plus.

$$u_n = 3 + 5n \qquad w_n = 40 - 6n$$

Réponses : a) oui ; b) non ; c) oui ; d) non.

Réponse. a) oui, $r = 5$ · b) non (géométrique) · c) oui, $r = -6$ · d) non.

Correction de l'exercice 5 – Un abonnement

a) À l'inscription, on a payé 45 € : $u_0 = 45$. Chaque mois, on ajoute le même montant, 28 € : la suite est arithmétique de raison $r = 28$.

b) La formule explicite est $u_n = u_0 + nr$, soit

$$u_n = 45 + 28n$$

c) Après un an, $n = 12$: $u_{12} = 45 + 28 \times 12 = 45 + 336 = 381$ €.

Le coût moyen par mois vaut alors $\frac{381}{12} = 31{,}75$ €, plus que 28 €, à cause de l'inscription.

Contrôle : $u_1 = 73$ € et $u_2 = 101$ €, soit bien 28 € de plus chaque mois. Réponses :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$u_0 = 45$ et $r = 28$; $u_n = 45 + 28n$; 381 **€**.

Réponse. a) $u_0 = 45$ et $r = 28$ · b) $u_n = 45 + 28n$ · c) 381 €.

Correction de l’exercice 6 – Un amortissement linéaire

a) La machine perd chaque année le même montant, 4500 € : sa valeur forme une suite arithmétique de premier terme 36 000 et de raison -4500.

$$v_n = 36\,000 - 4500n$$

b) $v_5 = 36\,000 - 22\,500 = 13\,500$ €.

c) On résout $36\,000 - 4500n = 0$, soit $4500n = 36\,000$, donc $n = 8$.

Chaque année, la machine perd $\dfrac{4500}{36\,000} = 12{,}5\,\%$ de sa valeur d’achat : c’est un amortissement linéaire. Un amortissement en pourcentage de la valeur restante donnerait une suite géométrique.

Contrôle : $v_8 = 36\,000 - 36\,000 = 0$. Réponses : $v_n = 36\,000 - 4500n$; 13 500 **€** ; **au bout de** 8 **ans**.

Réponse. a) $v_n = 36\,000 - 4500n$ · b) 13 500 € · c) au bout de 8 ans.

Correction de l’exercice 7 – Deux termes connus

a) De u_3 à u_8, on ajoute $8 - 3 = 5$ fois la raison : $u_8 = u_3 + 5r$, soit $64 = 29 + 5r$. Donc

$$r = \frac{64 - 29}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

b) On revient au premier terme : $u_3 = u_0 + 3r$, soit $29 = u_0 + 21$, d’où $u_0 = 8$. La formule explicite est $u_n = 8 + 7n$.

Contrôle : $u_3 = 8 + 21 = 29$ et $u_8 = 8 + 56 = 64$. Réponses : $r = 7$; $u_0 = 8$ et $u_n = 8 + 7n$.

Réponse. a) $r = 7$ · b) $u_0 = 8$ et $u_n = 8 + 7n$.

Correction de l’exercice 8 – Représentation graphique

a) On remplace n par 0, 1, 2, 3 et 4 : 6, 10, 14, 18 et 22. On ajoute 4 à chaque fois : la suite est arithmétique de raison 4.

b) Les points $(0\,;6)$, $(1\,;10)$, $(2\,;14)$, $(3\,;18)$ et $(4\,;22)$ sont **alignés** : quand n augmente de 1, l’ordonnée augmente toujours de 4.

c) Ils sont sur la droite représentant la fonction affine

$$f(x) = 4x + 6$$

Son coefficient est la raison, 4, et son ordonnée à l’origine le premier terme, 6. La suite n’est définie que pour des entiers : son nuage est fait de points isolés sur cette droite, et non de la droite entière.

Contrôle : $f(4) = 22 = u_4$. Réponses : 6, 10, 14, 18, 22 ; points alignés ; $f(x) = 4x + 6$.

Réponse. a) 6, 10, 14, 18, 22 · b) points alignés · c) $f(x) = 4x + 6$.

Correction de l’exercice 9 – Un plan d’épargne

a) Le capital part de 2000 € et augmente chaque mois du même montant, 150 € : c’est une suite arithmétique.

$$c_n = 2000 + 150n$$

b) $c_{18} = 2000 + 150 \times 18 = 2000 + 2700 = 4700$ €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) On résout $2000 + 150n \geq 8000$, soit $150n \geq 6000$, donc $n \geq 40$: il faut 40 mois, c'est-à-dire 3 ans et 4 mois.

Ce modèle ne tient pas compte des intérêts, que rapporterait un vrai placement.

Contrôle : $c_{40} = 2000 + 6000 = 8000$ €. Réponses : $c_n = 2000 + 150n$; 4700 **€** ; 40 **mois**.

Réponse. a) $c_n = 2000 + 150n$ · b) 4700 € · c) au bout de 40 mois.

Correction de l'exercice 10 – Deux suites à comparer

a) $u_0 = 200$ et $v_0 = 380$; $u_5 = 200 + 175 = 375$ et $v_5 = 380 + 75 = 455$. La suite v reste au-dessus.

b) On résout l'inéquation :

$$200 + 35n > 380 + 15n \Leftrightarrow 20n > 180 \Leftrightarrow n > 9$$

Le premier rang entier est $n = 10$. Pour $n = 9$, les deux termes sont égaux, à 515.

La suite u part de plus bas, mais elle augmente de 20 de plus à chaque rang : il lui faut $\frac{180}{20} = 9$ rangs pour rattraper l'écart initial de 180.

Contrôle : $u_{10} = 550 > v_{10} = 530$. Réponses : 200, 380, 375, 455 ; **à partir de** $n = 10$.

Réponse. a) 200, 380, 375, 455 · b) à partir de $n = 10$.

Correction de l'exercice 11 – Un stock qui diminue

a) Le stock part de 2400 pièces et diminue chaque semaine du même nombre, 180 : c'est une suite arithmétique de raison -180.

$$s_n = 2400 - 180n$$

b) $s_8 = 2400 - 1440 = 960$ pièces.

c) Le stock devient insuffisant quand $2400 - 180n < 300$, soit $180n > 2100$, donc $n > \frac{2100}{180} \approx 11{,}67$. Le premier rang entier est $n = 12$.

Contrôle : $s_{11} = 420$ pièces, encore suffisant, et $s_{12} = 240$, insuffisant. Il faut donc se réapprovisionner avant la 12^{e} semaine. Réponses : $s_n = 2400 - 180n$; 960 **pièces** ; **à la** 12^{e} **semaine**.

Réponse. a) $s_n = 2400 - 180n$ · b) 960 pièces · c) à la 12^{e} semaine.

Correction de l'exercice 12 – Compléter un tableau

a) De u_2 à u_5, on ajoute 3 fois la raison :

$$r = \frac{32 - 17}{5 - 2} = \frac{15}{3} = 5$$

b) $u_2 = u_0 + 2r$ donne $17 = u_0 + 10$, d'où $u_0 = 7$ et $u_n = 7 + 5n$. Donc $u_9 = 7 + 45 = 52$.

On peut aussi partir de $u_5 = 32$ et ajouter quatre fois la raison : $32 + 20 = 52$.

Contrôle : la suite complète, 7, 12, 17, 22, 27, 32, …, redonne bien $u_2 = 17$ et $u_5 = 32$. Réponses : $r = 5$; $u_0 = 7$ et $u_9 = 52$.

Réponse. a) $r = 5$ · b) $u_0 = 7$ et $u_9 = 52$.

Correction de l'exercice 13 – Arithmétique ou non ?

Une suite est arithmétique quand on ajoute chaque année le **même montant**. Quand on applique le même **pourcentage**, le montant ajouté change, car il dépend de la valeur atteinte.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) On ajoute 40 € chaque année : **arithmétique**, de raison 40, avec $u_n = 1900 + 40n$.

b) 3 % de 5000 € font 150 € la première année, mais 3 % de 5150 € font 154,50 € la deuxième : le montant ajouté augmente. Ce n'est **pas** une suite arithmétique, mais une suite géométrique de raison 1,03.

c) On retire 120 habitants chaque année : **arithmétique**, de raison -120.

d) Baisser de 10 %, c'est multiplier par 0,9 : le montant retiré diminue chaque année. Suite **géométrique** de raison 0,9, non arithmétique.

montant constant : arithmétique pourcentage constant : géométrique

Réponses : a) oui ; b) non ; c) oui ; d) non.

Réponse. a) oui · b) non · c) oui · d) non.

Correction de l'exercice 14 – Un tarif progressif

a) La première heure coûte 120 €, puis chaque heure supplémentaire ajoute 85 € : pour n heures supplémentaires,

$$c_n = 120 + 85n$$

Attention, n ne compte que les heures **supplémentaires**.

b) Six heures au total, c'est la première heure plus 5 heures supplémentaires : $c_5 = 120 + 425 = 545$ €.

c) On résout $120 + 85n \leq 800$, soit $85n \leq 680$, donc $n \leq 8$. On peut louer 8 heures supplémentaires, soit 9 heures au total, pour exactement 800 €.

Contrôle : 10 heures coûteraient $120 + 85 \times 9 = 885$ €, au-delà du budget. Réponses : $c_n = 120 + 85n$; 545 **€** ; 9 **heures** au total.

Réponse. a) $c_n = 120 + 85n$ · b) 545 € · c) 9 heures au total.

Correction de l'exercice 15 – Repérer une erreur

L'élève confond un **pourcentage** avec un **montant fixe**. Avec une hausse de 5 % par an, la première année ajoute bien 5, mais la deuxième ajoute 5 % de 105, soit 5,25 :

100 105 110,25 115,7625

Les différences, 5 puis 5,25 puis 5,5125, ne sont pas constantes : la suite n'est pas arithmétique. En revanche, on multiplie toujours par 1,05 : la suite est **géométrique** de raison 1,05, et $u_n = 100 \times 1{,}05^n$.

Sur une ou deux années, l'écart reste faible ; il grandit ensuite : au rang 10, on obtient environ 162,89, contre 150 avec le modèle arithmétique de l'élève. **Correction** : la suite est géométrique de raison 1,05.

Réponse. La suite est géométrique de raison 1,05, pas arithmétique.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : trois modèles

a) Chaque offre a un coût initial et un coût mensuel constant : ce sont trois suites arithmétiques.

$$a_n = 500 + 90n \qquad b_n = 200 + 130n \qquad c_n = 1400 + 40n$$

b) Sur 12 mois : $a_{12} = 1580$ €, $b_{12} = 1760$ € et $c_{12} = 1880$ €. À un an, A est la moins chère.

c) A est moins chère que B quand $500 + 90n < 200 + 130n$, soit $300 < 40n$, donc $n > 7{,}5$: dès 8 mois. À 8 mois, A coûte 1220 € et B 1240 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) C est moins chère que A quand $1400 + 40n < 500 + 90n$, soit $900 < 50n$, donc $n > 18$: dès 19 mois. À 19 mois, C coûte 2160 € et A 2210 €.

Bilan : B est la plus avantageuse jusqu'à 7 mois, A de 8 à 18 mois, puis C. Réponses : 1580 €, 1760 €, 1880 € ; **dès** 8 **mois** ; **dès** 19 **mois**.

Réponse. a) $500 + 90n$, $200 + 130n$, $1400 + 40n$ · b) 1580, 1760 et 1880 € · c) dès 8 mois · d) dès 19 mois.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).