Plaquette 3 – Suites géométriques et évolutions en pourcentage

Suites numériques — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. La suite (u_n) est géométrique de raison q non nulle si

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Formule explicite.

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Le lien avec les pourcentages. Une évolution de $+t\,\%$ par période donne une suite géométrique de raison

$$q = 1 + \frac{t}{100}$$

Évolution par période	Raison
$+5\,\%$	1,05
$-12\,\%$	0,88
$+100\,\%$	2
$-50\,\%$	0,5

Reconnaître une suite géométrique. On calcule les quotients successifs $\frac{u_1}{u_0}$, $\frac{u_2}{u_1}$, … : ils doivent être **tous égaux**.

Sens de variation (pour des termes strictement positifs).

Valeur de q	Variation
$q > 1$	croissante
$q = 1$	constante
$0 < q < 1$	décroissante

Retrouver la raison à partir de deux termes.

$$q = \left(\frac{u_p}{u_0}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Représentation graphique. Les points ne sont **pas** alignés : la croissance s'accélère si $q > 1$, s'amortit si $q < 1$.

Contrôle. Une raison est toujours positive dans les modèles économiques. Une raison supérieure à 1 ne peut pas produire une suite décroissante.

Correction de l'exercice 1 – Calculer des termes

a) Dans une suite géométrique de raison 1,05, on passe d'un terme au suivant en multipliant par 1,05 : $u_1 = 840$, $u_2 = 882$ et $u_3 = 926{,}10$.

b) La formule explicite est $u_n = 800 \times 1{,}05^n$, d'où

$$u_{10} = 800 \times 1{,}05^{10} \approx 1303{,}12$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Une hausse de 5 % par période fait donc environ +62,9 % en dix périodes, et non +50 % : chaque hausse s'applique à une valeur déjà augmentée.

Contrôle : $800 \times 1{,}05^3 = 926{,}10$, comme le calcul pas à pas. Réponses : 840, 882, 926,10 ; $u_{10} \approx 1303{,}12$.

Réponse. a) 840, 882, 926,10 · b) $u_{10} \approx 1303{,}12$.

Correction de l'exercice 2 – Une raison inférieure à 1

a) On multiplie par 0,85 à chaque étape : $v_1 = 2125$, $v_2 = 1806{,}25$ et $v_3 \approx 1535{,}31$.

b) Avec la formule explicite $v_n = 2500 \times 0{,}85^n$:

$$v_8 = 2500 \times 0{,}85^8 \approx 681{,}23$$

c) La raison 0,85 est comprise entre 0 et 1, et le premier terme est positif : chaque terme est plus petit que le précédent, la suite est **décroissante**. Elle reste pourtant positive, car un produit de nombres positifs est positif.

Une baisse de 15 % par période fait environ −72,8 % en huit périodes, et non −120 %, ce qui serait absurde. Réponses : 2125, 1806,25, 1535,31 ; $v_8 \approx 681{,}23$; **décroissante**.

Réponse. a) 2125, 1806,25, 1535,31 · b) $v_8 \approx 681{,}23$ · c) décroissante.

Correction de l'exercice 3 – Reconnaître une suite géométrique

Une suite est géométrique si l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre : on calcule les quotients successifs.

a) $\frac{15}{5} = \frac{45}{15} = \frac{135}{45} = 3$: **géométrique** de raison 3.

b) $\frac{12}{7} \approx 1{,}71$ et $\frac{17}{12} \approx 1{,}42$: **non** géométrique. Les différences valent toujours 5 : elle est arithmétique.

c) $\frac{900}{1000} = \frac{810}{900} = \frac{729}{810} = 0{,}9$: **géométrique** de raison 0,9, soit une baisse de 10 % par période.

d) Les quotients valent 2, 3 puis 2 : **non** géométrique, ni arithmétique d'ailleurs.

quotient constant : géométrique différence constante : arithmétique

Réponses : a) oui ; b) non ; c) oui ; d) non.

Réponse. a) oui, $q = 3$ · b) non (arithmétique) · c) oui, $q = 0{,}9$ · d) non.

Correction de l'exercice 4 – Du pourcentage à la raison

Augmenter de t %, c'est multiplier par $1 + \frac{t}{100}$; diminuer de t %, c'est multiplier par $1 - \frac{t}{100}$. Ce coefficient est la raison de la suite géométrique.

a) $q = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$.

b) $q = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$.

c) Doubler, c'est multiplier par 2 : $q = 2$, soit une hausse de 100 %.

d) 3,5 % = 0,035, donc

$$q = 1 - 0{,}035 = 0{,}965$$

Piège : écrire 0,65 en d), ce qui correspondrait à une baisse de 35 %. Les raisons a) et c) sont supérieures à 1 (suites croissantes), b) et d) inférieures à 1 (suites décroissantes). Réponses : 1,06 ; 0,88 ; 2 ; 0,965.

Réponse. a) 1,06 · b) 0,88 · c) 2 · d) 0,965.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 5 – Un capital placé

a) Placé à 4 % par an, le capital est multiplié chaque année par 1,04 : c’est une suite géométrique de premier terme 9000.

$$c_n = 9000 \times 1{,}04^n$$

b) $c_{12} = 9000 \times 1{,}04^{12} \approx 14\,409{,}29$ €.

c) Le coefficient multiplicateur global vaut $1{,}04^{12} \approx 1{,}601$, soit une hausse globale d’environ 60,1 %.

Ce taux dépasse les $12 \times 4 = 48$ % que l’on obtiendrait en additionnant : chaque année, les intérêts s’ajoutent au capital et rapportent eux-mêmes des intérêts.

Contrôle : $9000 \times 1{,}601 \approx 14\,409$. Réponses : $c_n = 9000 \times 1{,}04^n$; ≈ 14 409,29 **€** ; ≈ +60,10 %.

Réponse. a) $c_n = 9000 \times 1{,}04^n$ · b) ≈ 14 409,29 € · c) ≈ +60,10 %.

Correction de l’exercice 6 – Retrouver la raison

a) Pour passer de u_0 à u_2, on multiplie deux fois par la raison : $u_2 = u_0 \times q^2$. Donc

$$q^2 = \frac{2880}{2000} = 1{,}44$$

La raison d’une évolution en pourcentage est positive, donc $q = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$.

b) Un coefficient multiplicateur de $1{,}2 = 1 + 0{,}2$ correspond à une hausse de 20 % par période.

Piège : diviser l’évolution globale par 2. De 2000 à 2880, la hausse globale est de 44 %, mais deux hausses de 22 % donneraient $1{,}22^2 \approx 1{,}49$, et non 1,44.

Contrôle : $2000 \times 1{,}2 = 2400$, puis $2400 \times 1{,}2 = 2880$. Réponses : $q = 1{,}2$; +20 % par période.

Réponse. a) $q = 1{,}2$ · b) +20 % par période.

Correction de l’exercice 7 – Une population qui décline

a) Perdre 5 % par an, c’est multiplier par 0,95 : la population forme une suite géométrique.

$$p_n = 24\,000 \times 0{,}95^n$$

b) $p_5 = 24\,000 \times 0{,}95^5 \approx 18\,571$ habitants.

c) La suite est décroissante, car $0 < 0{,}95 < 1$. On calcule les termes de proche en proche : $p_5 \approx 18\,571$ est encore au-dessus de 18 000, mais $p_6 \approx 17\,642$ est en dessous.

En six ans, la population baisse d’environ 26,5 %, et non de $6 \times 5 = 30$ % : chaque baisse porte sur une population déjà réduite. Réponses : $p_n = 24\,000 \times 0{,}95^n$; ≈ 18 571 ; **après 6 ans**.

Réponse. a) $p_n = 24\,000 \times 0{,}95^n$ · b) environ 18 571 · c) après 6 ans.

Correction de l’exercice 8 – Arithmétique ou géométrique

a) Le premier placement ajoute chaque année le même montant : suite **arithmétique**, $a_n = 2000 + 400n$. Le second rapporte un pourcentage constant : suite **géométrique**, $g_n = 2000 \times 1{,}15^n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Après 4 ans : $a_4 = 3600$ € et $g_4 = 2000 \times 1{,}15^4 \approx 3498{,}01$ € ; le premier l'emporte. Après 8 ans :

$$a_8 = 5200 \qquad g_8 = 2000 \times 1{,}15^8 \approx 6118{,}05$$

et c'est le second qui l'emporte, avec environ 918 € d'avance.

Le croisement a lieu dès la cinquième année : $a_5 = 4000$ € contre $g_5 \approx 4022{,}71$ €. Une croissance géométrique finit toujours par dépasser une croissance arithmétique. Réponses : $2000 + 400n$ et $2000 \times 1{,}15^n$; 3600 **€ contre** 3498,01 **€**, puis 5200 **€ contre** 6118,05 **€**.

Réponse. a) $2000 + 400n$ et $2000 \times 1{,}15^n$ · b) 3600 € contre 3498,01 € à 4 ans ; 5200 € contre 6118,05 € à 8 ans.

Correction de l'exercice 9 – Une valeur qui double

a) Doubler, c'est multiplier par 2 : la raison vaut $q = 2$, et $u_n = 1000 \times 2^n$.

b) Après 10 ans :

$$u_{10} = 1000 \times 2^{10} = 1000 \times 1024 = 1\,024\,000$$

c) La valeur a été multipliée par plus de mille. À titre de comparaison, une suite arithmétique ajoutant 1000 par an n'atteindrait que 11 000 en dix ans. Une telle croissance ne peut pas durer : après 20 ans, on dépasserait le milliard. Ce modèle ne décrit raisonnablement que des phénomènes de courte durée, comme la multiplication de bactéries.

Contrôle : les premiers termes 2000, 4000, 8000, 16 000 doublent bien à chaque fois. Réponses : $q = 2$ et $u_n = 1000 \times 2^n$; 1 024 000 ; croissance irréaliste à long terme.

Réponse. a) $q = 2$ et $u_n = 1000 \times 2^n$ · b) 1 024 000 · c) croissance exponentielle, irréaliste à long terme.

Correction de l'exercice 10 – Une remise répétée

a) Une remise de 30 % revient à multiplier le prix par 0,7 chaque mois : $p_n = 100 \times 0{,}7^n$.

b) Après 5 mois :

$$p_5 = 100 \times 0{,}7^5 = 100 \times 0{,}16807 \approx 16{,}81\ €$$

La baisse globale est d'environ 83,2 %, et non de $5 \times 30 = 150$ %, ce qui serait absurde.

c) **Non** : le prix est un produit de nombres strictement positifs, il reste strictement positif. Il diminue et se rapproche de 0 sans jamais l'atteindre : environ 2,82 € après 10 mois, 0,08 € après 20 mois.

Contrôle : $100 \times 0{,}7 = 70$, puis 49, 34,30, 24,01 et 16,807. Réponses : $p_n = 100 \times 0{,}7^n$; ≈ 16,81 **€** ; non.

Réponse. a) $p_n = 100 \times 0{,}7^n$ · b) environ 16,81 € · c) non, il tend vers 0 sans l'atteindre.

Correction de l'exercice 11 – Retrouver le premier terme

Pour passer de u_0 à u_6, on multiplie six fois par la raison : $u_6 = u_0 \times 1{,}08^6$. Pour remonter, on divise donc par $1{,}08^6 \approx 1{,}5869$:

$$u_0 = \frac{u_6}{1{,}08^6} \approx \frac{7934{,}37}{1{,}5869} \approx 5000$$

Piège : diviser une seule fois par 1,08, ce qui donnerait environ 7346,64, c'est-à-dire u_5 : on n'aurait remonté qu'une période.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On peut interpréter le résultat comme un capital de 5000 € placé à 8 % pendant six ans.

Contrôle : $5000 \times 1{,}08^{6} \approx 7934{,}37$. On trouve $u_0 = 5000$.

Réponse. $u_0 = 5000$.

Correction de l’exercice 12 – Un parc automobile

a) Chaque année, 18 % des véhicules anciens sont retirés : il en reste 82 %, et l’on multiplie par 0,82.

$$a_n = 450 \times 0{,}82^{n}$$

b) $a_4 = 450 \times 0{,}82^{4} \approx 203$ véhicules.

c) La suite est décroissante. De proche en proche : $a_5 \approx 167$, encore au-dessus de 150, puis $a_6 \approx 137$, en dessous.

Les retraits diminuent d’année en année, 81 véhicules la première année contre environ 30 la sixième, car le taux reste le même mais s’applique à un parc ancien plus petit.

Contrôle : $450 \times 0{,}82 = 369$, soit bien 81 retraits la première année. Réponses : $a_n = 450 \times 0{,}82^{n}$; ≈ 203 ; **après** 6 **ans**.

Réponse. a) $a_n = 450 \times 0{,}82^{n}$ · b) environ 203 · c) après 6 ans.

Correction de l’exercice 13 – Un abonnement à tarif croissant

a) Le tarif augmente de 7 % par an : on le multiplie chaque année par 1,07.

$$t_n = 240 \times 1{,}07^{n}$$

b) La sixième année correspond à $n = 5$, puisque la première année correspond à $n = 0$: $t_5 = 240 \times 1{,}07^{5} \approx 336{,}61$ €.

c) La suite est croissante. De proche en proche : $t_7 \approx 385{,}39$ €, encore sous 400 €, puis $t_8 \approx 412{,}36$ €. Le tarif dépasse 400 € à partir de $n = 8$, c’est-à-dire la neuvième année d’abonnement.

Entre la première et la sixième année, la hausse est d’environ 40,3 %, et non de $5 \times 7 = 35$ %. Réponses : $t_n = 240 \times 1{,}07^{n}$; $\approx 336{,}61$ **€** ; **à partir de** $n = 8$.

Réponse. a) $t_n = 240 \times 1{,}07^{n}$ · b) environ 336,61 € · c) à partir de $n = 8$.

Correction de l’exercice 14 – Deux raisons à comparer

a) Chaque chiffre d’affaires est multiplié chaque année par son coefficient, 1,03 ou 1,09 :

$$600 \times 1{,}03^{10} \approx 806{,}35 \qquad 600 \times 1{,}09^{10} \approx 1420{,}42$$

en milliers d’euros.

b) Le rapport vaut $\dfrac{1420{,}42}{806{,}35} \approx 1{,}76$: la seconde entreprise réalise environ 76 % de plus que la première.

On retrouve ce rapport autrement : chaque année, le rapport est multiplié par $\dfrac{1{,}09}{1{,}03} \approx 1{,}058$, et $1{,}058^{10} \approx 1{,}76$. Un écart de seulement 6 points de taux par an produit un écart considérable sur dix ans, et il continue de se creuser. Réponses : $\approx 806{,}35$ et $\approx 1420{,}42$ milliers d’euros ; rapport $\approx 1{,}76$.

Réponse. a) environ 806,35 et 1420,42 · b) un rapport d’environ 1,76.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Repérer une erreur

L’affirmation est **fausse**. Avec $u_n = u_0 \times 0{,}9^n$, le nombre $0{,}9^n$ est un produit de nombres positifs : il est toujours positif. Si $u_0 > 0$, tous les termes sont donc positifs.

Ce qui est vrai, c’est que la suite est **décroissante** et qu’elle se rapproche de 0 sans jamais l’atteindre. Avec $u_0 = 1000$, par exemple :

$$u_{10} \approx 348{,}68 \qquad u_{50} \approx 5{,}15 \qquad u_{100} \approx 0{,}027$$

L’élève confond peut-être avec une suite arithmétique décroissante, comme $u_n = 1000 - 100n$, qui devient bien négative, dès le rang 11. **Leçon** : décroissante ne veut pas dire négative. Une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme positif reste positive.

Réponse. Faux : une suite géométrique de raison positive garde le signe de son premier terme et tend vers 0.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : un modèle complet

a) Une hausse de 5,5 % par an revient à multiplier par 1,055 :

$$v_n = 30\,000 \times 1{,}055^n$$

b) $v_5 = 30\,000 \times 1{,}055^5 \approx 39\,209$ et $v_{10} = 30\,000 \times 1{,}055^{10} \approx 51\,244$ unités.

c) La suite est croissante. $v_9 \approx 48\,573$ est encore sous 50 000, mais $v_{10} \approx 51\,244$ dépasse : les ventes dépassent 50 000 unités à partir de $n = 10$.

d) Le coefficient global sur dix ans vaut $1{,}055^{10} \approx 1{,}7081$, soit une hausse d’environ 70,8 %, bien plus que $10 \times 5{,}5 = 55$ %.

Contrôle : la première année, les ventes augmentent de 1650 unités, et la dixième année d’environ 2672 : les gains annuels grandissent. Réponses : $v_n = 30\,000 \times 1{,}055^n$; $\approx 39\,209$ et $\approx 51\,244$; **à partir de** $n = 10$; $\approx +70{,}81$ %.

Réponse. a) $v_n = 30\,000 \times 1{,}055^n$ · b) $\approx 39\,209$ et $51\,244$ · c) à partir de $n = 10$ · d) $\approx +70{,}81$ %.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).