

Plaquette 3 – Suites géométriques et évolutions en pourcentage

Suites numériques — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. La suite (u_n) est géométrique de raison q non nulle si

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Formule explicite.

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Le lien avec les pourcentages. Une évolution de $+t\%$ par période donne une suite géométrique de raison

$$q = 1 + \frac{t}{100}$$

Évolution par période	Raison
+5 %	1,05
−12 %	0,88
+100 %	2
−50 %	0,5

Reconnaître une suite géométrique. On calcule les quotients successifs $\frac{u_1}{u_0}, \frac{u_2}{u_1}, \dots$: ils doivent être **tous égaux**.

Sens de variation (pour des termes strictement positifs).

Valeur de q	Variation
$q > 1$	croissante
$q = 1$	constante
$0 < q < 1$	décroissante

Retrouver la raison à partir de deux termes.

$$q = \left(\frac{u_p}{u_0} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Représentation graphique. Les points ne sont **pas** alignés : la croissance s'accélère si $q > 1$, s'amortit si $q < 1$.

Contrôle. Une raison est toujours positive dans les modèles économiques. Une raison supérieure à 1 ne peut pas produire une suite décroissante.

Correction de l'exercice 1 – Calculer des termes

a) **Relation de récurrence** : $u_{n+1} = 1,05 \times u_n$ ✓

— **Calcul de u_1** : $800 \times 1,05$ ✓

— **Valeur** : 840 ✓

— **Calcul de u_2** : $840 \times 1,05$ ✓

- **Valeur** : 882 ✓
- **Calcul de u_3** : $882 \times 1,05$ ✓
- **Valeur** :

$$u_3 = 926,10$$

- **Contrôle par la formule explicite** : $800 \times 1,05^3$ ✓
- **Valeur** : 926,10 ✓
- **Concordance** ✓

b) **Formule explicite** : $u_n = 800 \times 1,05^n$ ✓

- **Substitution** : $800 \times 1,05^{10}$ ✓
- **Valeur de la puissance** : $\approx 1,6289$ ✓
- **Résultat** :

$$u_{10} \approx 1303,12$$

- **Interprétation** : une hausse de 5 % par période ✓
- **Taux global sur dix périodes** : $\approx +62,89\%$ ✓
- **Piège** : multiplier 5 par 10 ✓
- **Ce que cela donnerait** : +50 %, soit 1200 ✓
- **Écart** : plus de 100 ✓
- **Sens de variation** : croissante, car $q > 1$ ✓
- **Valeur de u_{20}** : $\approx 2122,64$ ✓

Réponse. a) 840, 882, 926,10 · b) $u_{10} \approx 1303,12$.

Correction de l'exercice 2 – Une raison inférieure à 1

- a) **Calcul de v_1** : $2500 \times 0,85$ ✓
- **Valeur** : 2125 ✓
 - **Calcul de v_2** : $2125 \times 0,85$ ✓
 - **Valeur** : 1806,25 ✓
 - **Calcul de v_3** : $1806,25 \times 0,85$ ✓
 - **Valeur** :

$$v_3 = 1535,31$$

b) **Formule explicite** : $v_n = 2500 \times 0,85^n$ ✓

- **Substitution** : $2500 \times 0,85^8$ ✓
- **Valeur de la puissance** : $\approx 0,2725$ ✓
- **Résultat** :

$$v_8 \approx 681,23$$

c) **Comparaison de q à 1** : $0,85 < 1$ ✓

- **Sens de variation** :

décroissante

- **Interprétation** : une baisse de 15 % par période ✓
- **Taux global sur huit périodes** : $\approx -72,75\%$ ✓
- **Piège** : multiplier 15 par 8 ✓
- **Ce que cela donnerait** : -120 %, impossible ✓
- **Explication** : chaque baisse porte sur un montant déjà réduit ✓

- **La suite atteint-elle zéro ?** Non ✓
- **Raison** : le produit de nombres positifs reste positif ✓
- **Valeur de v_{20}** : $\approx 96,64$ ✓

Réponse. a) 2125, 1806,25, 1535,31 · b) $v_8 \approx 681,23$ · c) décroissante.

Correction de l'exercice 3 – Reconnaître une suite géométrique

- **Méthode** : calculer les quotients successifs ✓
- a) **Quotients** : 3, 3, 3 ✓
- **Constat** : tous égaux ✓
- **Verdict** : **géométrique**, de raison 3 ✓
- **Formule explicite** : $u_n = 5 \times 3^n$ ✓
- **Terme suivant** : 405 ✓
- b) **Quotients** : $\approx 1,714$ puis $\approx 1,417$ ✓
- **Constat** : ils varient ✓
- **Verdict** : **non** géométrique ✓
- **Test des différences** : 5, 5, 5 ✓
- **Nature réelle** : arithmétique de raison 5 ✓
- c) **Quotients** : 0,9, 0,9, 0,9 ✓
- **Verdict** : **géométrique**, de raison 0,9 ✓
- **Interprétation** : une baisse de 10 % par période ✓
- **Terme suivant** : 656,1 ✓
- d) **Quotients** : 2, 3, 2 ✓
- **Constat** : ils varient ✓
- **Verdict** : **non** géométrique ✓
- **Test des différences** : 3, 12, 18 ✓
- **Constat** : pas arithmétique non plus ✓
- **Bilan** : deux suites géométriques sur quatre ✓
- **Règle** : quotient constant donne géométrique, différence constante donne arithmétique ✓

Réponse. a) oui, $q = 3$ · b) non (arithmétique) · c) oui, $q = 0,9$ · d) non.

Correction de l'exercice 4 – Du pourcentage à la raison

- **Formule** : $q = 1 + \frac{t}{100}$ ✓
 - a) **Calcul** : $1 + 0,06$ ✓
 - **Raison** :
- $$q = 1,06$$
- b) **Calcul** : $1 - 0,12$ ✓
 - **Raison** :
- $$q = 0,88$$
- c) **Doublement** : la valeur est multipliée par 2 ✓
 - **Raison** :
- $$q = 2$$

— **Taux correspondant** : +100 % ✓

d) **Calcul** : $1 - 0,035$ ✓

— **Raison** :

$$q = 0,965$$

— **Piège** : écrire 0,65 ✓

— **Contrôle** : $3,5\% = 0,035$ ✓

— **Sens de variation de a)** : croissante ✓

— **De b)** : décroissante ✓

— **De c)** : croissante, très rapidement ✓

— **De d)** : décroissante lentement ✓

— **Contrôle général** : toutes les raisons sont positives ✓

— **Valeur après 10 périodes pour a)** : coefficient $1,06^{10} \approx 1,7908$ ✓

— **Pour c)** : coefficient $2^{10} = 1024$ ✓

— **Interprétation** : la croissance exponentielle est explosive ✓

Réponse. a) $1,06 \cdot$ b) $0,88 \cdot$ c) $2 \cdot$ d) $0,965$.

Correction de l'exercice 5 - Un capital placé

a) **Capital initial** : 9000 € ✓

— **Raison** : 1,04 ✓

— **Nature** : suite géométrique ✓

— **Formule explicite** :

$$c_n = 9000 \times 1,04^n$$

b) **Substitution** : $9000 \times 1,04^{12}$ ✓

— **Valeur de la puissance** : $\approx 1,601$ ✓

— **Résultat** :

$$c_{12} \approx 14\,409,29 \text{ €}$$

c) **Coefficient global** : 1,601 ✓

— **Taux global** : $1,601 - 1$ ✓

— **Valeur approchée** :

$$\approx +60,10\%$$

— **Piège** : multiplier 4 par 12 ✓

— **Ce que cela donnerait** : +48 % ✓

— **Écart** : plus de 12 points ✓

— **Intérêts perçus** : $\approx 5409,29 \text{ €}$ ✓

— **Intérêts simples sur douze ans** : $12 \times 360 = 4320 \text{ €}$ ✓

— **Écart** : $\approx 1089,29 \text{ €}$ ✓

— **Durée pour doubler le capital** : environ 18 ans ✓

— **Contrôle** : $1,04^{18} \approx 2,026$ ✓

— **Capital après 20 ans** : $\approx 19\,718 \text{ €}$ ✓

Réponse. a) $c_n = 9000 \times 1,04^n$ · b) $\approx 14\,409,29 \text{ €}$ · c) $\approx +60,10\%$.

Correction de l'exercice 6 – Retrouver la raison

a) **Relation** : $u_4 = u_0 \times q^4$ ✓

— **Substitution** : $4096 = 2000 \times q^4$ ✓

— **Isolement** : $q^4 = \frac{4096}{2000}$ ✓

— **Valeur** : 2,048 ✓

— **Racine quatrième** : $q = 2,048^{\frac{1}{4}}$ ✓

— **Valeur approchée** :

$$q \approx 1,1963$$

b) **Taux** : $1,1963 - 1$ ✓

— **Valeur approchée** :

$$\approx +19,63 \% \text{ par période}$$

— **Vérification** : $2000 \times 1,1963^4$ ✓

— **Valeur approchée** : ≈ 4096 ✓

— **Concordance** ✓

— **Piège** : diviser le taux global par 4 ✓

— **Taux global** : $+104,8 \%$ ✓

— **Ce que cela donnerait** : $+26,2 \%$ ✓

— **Contrôle** : $1,262^4 \approx 2,537$ ✓

— **Écart avec 2,048** : considérable ✓

— **Valeur de u_2** : $2000 \times 1,1963^2 \approx 2862,3$ ✓

— **Contrôle** : $\sqrt{2,048} \approx 1,4311$ ✓

— **Et** : $2000 \times 1,4311 \approx 2862,2$ ✓

— **Concordance** ✓

Réponse. a) $q \approx 1,1963$ · b) environ $+19,63 \%$ par période.

Correction de l'exercice 7 – Une population qui décline

a) **Population initiale** : 24 000 ✓

— **Raison** : 0,95 ✓

— **Formule explicite** :

$$p_n = 24\,000 \times 0,95^n$$

b) **Substitution** : $24\,000 \times 0,95^5$ ✓

— **Valeur de la puissance** : $\approx 0,7738$ ✓

— **Résultat** :

$$p_5 \approx 18\,571 \text{ habitants}$$

c) **Calcul de proche en proche** ✓

— **Après 5 ans** : 18 571 ✓

— **Après 6 ans** : $\approx 17\,642$ ✓

— **Comparaison** : $17\,642 < 18\,000$ ✓

— **Réponse** :

après 6 ans

- **Contrôle pour $n = 5$** : $18\,571 > 18\,000$ ✓
- **Cohérence** ✓
- **Perte totale sur six ans** : $\approx 6\,358$ habitants ✓
- **Taux global** : $\approx -26,49\%$ ✓
- **Piège** : multiplier 5 par 6 ✓
- **Ce que cela donnerait** : -30% ✓
- **Écart** : 3,5 points ✓
- **Population après 15 ans** : $\approx 11\,119$ ✓
- **Durée pour perdre la moitié** : environ 13,5 ans ✓

Réponse. a) $p_n = 24\,000 \times 0,95^n$ · b) environ 18 571 · c) après 6 ans.

Correction de l'exercice 8 - Arithmétique ou géométrie

a) **Premier placement** : ajout constant ✓

- **Nature** : arithmétique ✓
- **Formule** :

$$a_n = 2000 + 400n$$

- **Second placement** : taux constant ✓
- **Nature** : géométrique ✓
- **Formule** :

$$g_n = 2000 \times 1,15^n$$

b) **Après quatre ans, premier** : $2000 + 1600$ ✓

- **Valeur** : 3600 € ✓
- **Second** : $2000 \times 1,15^4$ ✓
- **Valeur de la puissance** : $\approx 1,749$ ✓
- **Valeur** : $\approx 3\,498,01$ € ✓
- **Comparaison** : le **premier** l'emporte ✓
- **Écart** : $\approx 101,99$ € ✓
- **Après huit ans, premier** : $2000 + 3200$ ✓
- **Valeur** : 5200 € ✓
- **Second** : $2000 \times 1,15^8$ ✓
- **Valeur de la puissance** : $\approx 3,059$ ✓
- **Valeur** :

$$\approx 6\,118,05 \text{ €}$$

- **Comparaison** : le **second** l'emporte ✓
- **Écart** : $\approx 918,05$ € ✓
- **Interprétation** : la croissance géométrique finit toujours par dépasser ✓
- **Rang de croisement** : entre 6 et 7 ans ✓
- **Contrôle à 6 ans** : 4400 € contre $\approx 4\,626,12$ € ✓
- **Constat** : le croisement a déjà eu lieu ✓
- **Contrôle à 5 ans** : 4000 € contre $\approx 4\,022,71$ € ✓

Réponse. a) $2000 + 400n$ et $2000 \times 1,15^n$ · b) 3600 € contre 3498,01 € à 4 ans ; 5200 € contre 6118,05 € à 8 ans.

Correction de l'exercice 9 – Une valeur qui double

a) **Doublement** : multiplication par 2 ✓

— **Raison** :

$$q = 2$$

— **Formule explicite** :

$$u_n = 1000 \times 2^n$$

— **Taux correspondant** : +100 % par an ✓

b) **Substitution** : 1000×2^{10} ✓

— **Valeur de la puissance** : 1024 ✓

— **Résultat** :

$$1\,024\,000$$

c) **Constat** : la valeur est multipliée par plus de 1000 ✓

— **Nature** : croissance **exponentielle** ✓

— **Comparaison avec une suite arithmétique de raison 1000** ✓

— **Valeur après dix ans** : 11 000 ✓

— **Rapport** : environ 93 ✓

— **Interprétation** : les deux modèles n'ont rien de comparable ✓

— **Valeurs intermédiaires** : 2000, 4000, 8000, 16 000 ✓

— **Observation** : chaque terme est la somme de tous les précédents plus 1000 ✓

— **Contrôle** : $1000 + 2000 + 4000 = 7000$, et $u_3 = 8000$ ✓

— **Après 20 ans** : plus d'un milliard ✓

— **Contrôle** : $2^{20} = 1\,048\,576$ ✓

— **Limite du modèle** : aucune grandeur réelle ne double indéfiniment ✓

— **Exemples réalistes** : une population de bactéries, sur une durée courte ✓

Réponse. a) $q = 2$ et $u_n = 1000 \times 2^n$ · b) 1 024 000 · c) croissance exponentielle, irréaliste à long terme.

Correction de l'exercice 10 – Une remise répétée

a) **Prix initial** : 100 € ✓

— **Raison** : 0,7 ✓

— **Formule explicite** :

$$p_n = 100 \times 0,7^n$$

b) **Substitution** : $100 \times 0,7^5$ ✓

— **Valeur de la puissance** : 0,16807 ✓

— **Résultat** :

$$\approx 16,81 \text{ €}$$

— **Baisse globale** : $\approx -83,19\%$ ✓

— **Piège** : multiplier 30 par 5 ✓

— **Ce que cela donnerait** : -150% , impossible ✓

c) **Réponse** : **non** ✓

— **Argument** : le produit de nombres strictement positifs reste positif ✓

- **Valeur après 10 mois** : $\approx 2,82 \text{ €}$ ✓
- **Après 20 mois** : $\approx 0,08 \text{ €}$ ✓
- **Après 30 mois** : $\approx 0,0022 \text{ €}$ ✓
- **Constat** : le prix s'approche de zéro sans jamais l'atteindre ✓
- **Vocabulaire** : la suite **tend vers 0** ✓
- **Condition** : $0 < q < 1$ ✓
- **Rang où le prix passe sous 1 €** : $0,7^n < 0,01$ ✓
- **Recherche** : $0,7^{12} \approx 0,0138$ ✓
- **Et** : $0,7^{13} \approx 0,0097$ ✓
- **Réponse** : au 13^e mois ✓

Réponse. a) $p_n = 100 \times 0,7^n$ · b) environ 16,81 € · c) non, il tend vers 0 sans l'atteindre.

Correction de l'exercice 11 - Retrouver le premier terme

- **Relation** : $u_6 = u_0 \times 1,08^6$ ✓
- **Valeur de la puissance** : $\approx 1,5869$ ✓
- **Isolement** : $u_0 = \frac{u_6}{1,08^6}$ ✓
- **Calcul** : $\frac{7934,37}{1,5869}$ ✓
- **Résultat** :
$$u_0 = 5000$$
- **Vérification** : $5000 \times 1,5869$ ✓
- **Valeur approchée** : 7934,5 ✓
- **Concordance aux arrondis près** ✓
- **Interprétation** : un capital de 5000 € placé à 8 % pendant six ans ✓
- **Intérêts** : $\approx 2934,37 \text{ €}$ ✓
- **Taux global** : $\approx +58,69 \%$ ✓
- **Piège** : diviser par 1,08 seulement ✓
- **Ce que cela donnerait** : $\approx 7346,64$ ✓
- **Erreur** : on n'aurait remonté qu'une période ✓
- **Valeur de u_3** : $5000 \times 1,08^3 \approx 6298,56$ ✓
- **Contrôle** : $6298,56 \times 1,08^3 \approx 7934,37$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Formule générale** : $u_0 = \frac{u_n}{q^n}$ ✓

Réponse. $u_0 = 5000$.

Correction de l'exercice 12 - Un parc automobile

- a) **Nombre initial** : 450 ✓
- **Proportion conservée** : 82 % ✓
- **Raison** : 0,82 ✓
- **Formule explicite** :

$$a_n = 450 \times 0,82^n$$

- b) **Substitution** : $450 \times 0,82^4$ ✓

— **Valeur de la puissance** : $\approx 0,4521$ ✓

— **Résultat** :

≈ 203 véhicules

c) **Calcul de proche en proche** ✓

— **Après 4 ans** : 203 ✓

— **Après 5 ans** : ≈ 167 ✓

— **Après 6 ans** : ≈ 137 ✓

— **Comparaison** : $137 < 150$ ✓

— **Réponse** :

après 6 ans

— **Contrôle pour $n = 5$** : $167 > 150$ ✓

— **Cohérence** ✓

— **Véhicules retirés en six ans** : ≈ 313 ✓

— **Proportion retirée** : $\approx 69,6\%$ ✓

— **Retraits de la première année** : 81 ✓

— **Retraits de la sixième année** : ≈ 30 ✓

— **Observation** : les retraits annuels diminuent ✓

— **Explication** : le taux est constant, la base diminue ✓

— **Durée pour n'avoir plus que 50 véhicules** : environ 11 ans ✓

Réponse. a) $a_n = 450 \times 0,82^n$ · b) environ 203 · c) après 6 ans.

Correction de l'exercice 13 - Un abonnement à tarif croissant

a) **Tarif initial** : 240 € ✓

— **Raison** : 1,07 ✓

— **Formule explicite** :

$$t_n = 240 \times 1,07^n$$

b) **Sixième année** : $n = 5$ ✓

— **Substitution** : $240 \times 1,07^5$ ✓

— **Valeur de la puissance** : $\approx 1,4026$ ✓

— **Résultat** :

$\approx 336,61$ €

c) **Calcul de proche en proche** ✓

— **Année $n = 7$** : $\approx 385,39$ € ✓

— **Année $n = 8$** : $\approx 412,36$ € ✓

— **Comparaison** : $412,36 > 400$ ✓

— **Réponse** :

à partir de $n = 8$

— **Interprétation** : la neuvième année d'abonnement ✓

— **Contrôle pour $n = 7$** : $385,39 < 400$ ✓

— **Cohérence** ✓

— **Coût cumulé sur les cinq premières années** : ≈ 1380 € ✓

— **Taux global de la première à la sixième année** : $\approx +40,26\%$ ✓

— **Piège** : multiplier 7 par 5 ✓

- **Ce que cela donnerait** : $+35\%$ ✓
- **Écart** : plus de 5 points ✓
- **Tarif à $n = 10$** : $\approx 472,12$ € ✓

Réponse. a) $t_n = 240 \times 1,07^n$ · b) environ 336,61 € · c) à partir de $n = 8$.

Correction de l'exercice 14 - Deux raisons à comparer

a) **Première entreprise** : $600 \times 1,03^{10}$ ✓

— **Valeur de la puissance** : $\approx 1,3439$ ✓

— **Résultat** :

$$\approx 806,35$$

— **Seconde entreprise** : $600 \times 1,09^{10}$ ✓

— **Valeur de la puissance** : $\approx 2,3674$ ✓

— **Résultat** :

$$\approx 1420,42$$

b) **Rapport** : $\frac{1420,42}{806,35}$ ✓

— **Valeur approchée** :

$$\approx 1,76$$

— **Interprétation** : la seconde fait 76 % de plus ✓

— **Rapport des raisons** : $\frac{1,09}{1,03} \approx 1,0583$ ✓

— **Rapport élevé à la puissance 10** : $\approx 1,76$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Écart de taux annuel** : 6 points seulement ✓

— **Effet cumulé sur dix ans** : considérable ✓

— **Leçon** : un écart de quelques points change tout à long terme ✓

— **Après 20 ans, première** : $\approx 1083,67$ ✓

— **Seconde** : $\approx 3362,65$ ✓

— **Rapport** : $\approx 3,10$ ✓

— **Observation** : l'écart continue de se creuser ✓

Réponse. a) environ 806,35 et 1420,42 · b) un rapport d'environ 1,76.

Correction de l'exercice 15 - Repérer une erreur

— **Affirmation** : la suite deviendrait négative ✓

— **Formule** : $u_n = u_0 \times 0,9^n$ ✓

— **Signe de $0,9^n$** : toujours **positif** ✓

— **Justification** : un produit de nombres positifs est positif ✓

— **Conclusion** : si $u_0 > 0$, tous les termes sont positifs ✓

— **Verdict** : l'affirmation est **fausse** ✓

— **Ce qui est vrai** : la suite est décroissante ✓

— **Et** : elle tend vers 0 ✓

— **Formulation correcte** :

elle se rapproche de 0 sans jamais l'atteindre

— **Contrôle avec $u_0 = 1000$** ✓

- **Après 10 termes** : $\approx 348,68$ ✓
- **Après 50 termes** : $\approx 5,15$ ✓
- **Après 100 termes** : $\approx 0,027$ ✓
- **Constat** : toujours positif ✓
- **Différence avec une suite arithmétique décroissante** ✓
- **Exemple** : $u_n = 1000 - 100n$ ✓
- **Au rang 11** : -100 ✓
- **Constat** : elle devient bien négative ✓
- **Leçon** : décroissante n'implique pas négative ✓

Réponse. Faux : une suite géométrique de raison positive garde le signe de son premier terme et tend vers 0.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un modèle complet

a) **Ventes initiales** : 30 000 ✓

- **Raison** : 1,055 ✓
- **Formule explicite** :

$$v_n = 30\,000 \times 1,055^n$$

b) **Calcul de v_5** : $30\,000 \times 1,055^5$ ✓

- **Valeur de la puissance** : $\approx 1,3070$ ✓
- **Résultat** :

$$v_5 \approx 39\,209$$

— **Calcul de v_{10}** : $30\,000 \times 1,055^{10}$ ✓

- **Valeur de la puissance** : $\approx 1,7081$ ✓
- **Résultat** :

$$v_{10} \approx 51\,244$$

c) **Calcul de proche en proche** ✓

- **Après 9 ans** : $\approx 48\,573$ ✓
- **Comparaison** : $48\,573 < 50\,000$ ✓
- **Après 10 ans** : $\approx 51\,244$ ✓
- **Comparaison** : $51\,244 > 50\,000$ ✓
- **Réponse** :

à partir de $n = 10$

d) **Coefficient global** : 1,7081 ✓

- **Taux global** :

$$\approx +70,81\%$$

- **Piège** : multiplier 5,5 par 10 ✓
- **Ce que cela donnerait** : $+55\%$ ✓
- **Écart** : près de 16 points ✓
- **Croissance en unités** : $\approx 21\,244$ ✓
- **Croissance de la première année** : 1650 ✓
- **Croissance de la dixième année** : ≈ 2672 ✓
- **Observation** : les gains annuels augmentent ✓
- **Ventes après 15 ans** : $\approx 66\,974$ ✓

Réponse. a) $v_n = 30\,000 \times 1,055^n$ · b) $\approx 39\,209$ et $51\,244$ · c) à partir de $n = 10$ · d) $\approx +70,81\%$.