Plaquette 4 – Variations, seuils et tableurs

Suites numériques — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Sens de variation.

Type de suite	Croissante si	Décroissante si
arithmétique	$r > 0$	$r < 0$
géométrique à termes positifs	$q > 1$	$0 < q < 1$

Recherche d'un seuil. On calcule les termes de proche en proche jusqu'à franchir la valeur visée, puis on donne le **premier rang** qui convient.

Formulation	Rang à retenir
« dépasse S »	le premier n tel que $u_n > S$
« atteint S »	le premier n tel que $u_n \geq S$
« passe sous S »	le premier n tel que $u_n < S$

Toujours donner le rang précédent. Il prouve que le seuil n'était pas encore franchi : c'est ce que le correcteur attend. Par exemple, pour $u_n = 1000 \times 1{,}1^n$ et le seuil 1500 :

$$u_4 \approx 1464{,}10 < 1500 < u_5 \approx 1610{,}51$$

donc le premier rang est $n = 5$.

Au tableur. On saisit le rang en colonne A et le terme en colonne B.

Cellule	Contenu
A2	0
B2	la valeur de u_0
A3	$= A2 + 1$
B3 arithmétique	$= B2 + r$
B3 géométrique	$= B2 * q$

Puis on **recopie vers le bas**. La formule explicite s'écrirait plutôt *=B$2*q^A3*, avec une référence absolue à la cellule du premier terme.

Contrôles. Une suite géométrique décroissante ne franchit jamais 0. Une suite arithmétique décroissante finit toujours par devenir négative.

Correction de l'exercice 1 – Sens de variation

Pour une suite arithmétique, le sens de variation se lit sur le signe de la raison ; pour une suite géométrique de premier terme positif, sur la position de la raison par rapport à 1.

a) Arithmétique de raison $3 > 0$: **croissante**.

b) Arithmétique de raison $-7 < 0$: **décroissante**. Elle devient même négative : $200 - 7n < 0$ dès $n = 29$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Géométrique de raison 1,03 > 1, premier terme positif : **croissante**.

d) Géométrique de raison 0,96, comprise entre 0 et 1 : **décroissante**, mais elle reste positive.

$$v_{50} = 200 - 350 = -150 \qquad z_{50} = 500 \times 0{,}96^{50} \approx 66{,}12$$

Les suites b) et d) décroissent toutes les deux, mais une suite arithmétique décroissante finit par devenir négative, alors qu'une suite géométrique de raison positive garde le signe de son premier terme.

Réponse. a) croissante · b) décroissante · c) croissante · d) décroissante.

Correction de l'exercice 2 – Construire un tableau de valeurs

a) Une hausse de 4 % revient à multiplier par 1,04 : $u_n = 25\,000 \times 1{,}04^n$.

b) On multiplie chaque terme par 1,04 pour obtenir le suivant, en arrondissant à l'unité :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	25 000	26 000	27 040	28 122	29 246	30 416

La formule explicite redonne le dernier terme directement :

$$u_5 = 25\,000 \times 1{,}04^5 \approx 30\,416$$

L'augmentation annuelle passe de 1000 à environ 1170 : elle grandit, car 4 % s'appliquent chaque année à une valeur plus grande. Réponses : $u_n = 25\,000 \times 1{,}04^n$; 25 000, 26 000, 27 040, 28 122, 29 246, 30 416.

Réponse. a) $u_n = 25\,000 \times 1{,}04^n$ · b) 25 000, 26 000, 27 040, 28 122, 29 246, 30 416.

Correction de l'exercice 3 – Franchir un seuil à la hausse

La suite est croissante, car sa raison 1,04 est supérieure à 1 : il suffit de calculer les termes de proche en proche jusqu'à dépasser 40 000. En partant de $u_5 \approx 30\,416$:

$$u_6 \approx 31\,633 \quad u_7 \approx 32\,898 \quad u_8 \approx 34\,214 \quad u_9 \approx 35\,583 \quad u_{10} \approx 37\,006$$

puis $u_{11} \approx 38\,486$, encore sous 40 000, et $u_{12} \approx 40\,026$, au-dessus.

Pour justifier que 12 est le **premier** rang, on donne les deux termes encadrants : $u_{11} < 40\,000 < u_{12}$.

Contrôle par la formule : $1{,}04^{12} \approx 1{,}601$ et $25\,000 \times 1{,}601 \approx 40\,026$. Le premier rang est $n = 12$.

Réponse. $n = 12$, car $u_{11} \approx 38\,486$ et $u_{12} \approx 40\,026$.

Correction de l'exercice 4 – Franchir un seuil à la baisse

a) Une baisse de 10 % revient à multiplier par 0,9 : $v_n = 600 \times 0{,}9^n$.

b) La suite est décroissante. On calcule de proche en proche : 540, 486, 437,4, 393,66, 354,29, puis

$$v_6 \approx 318{,}86 > 300 \qquad v_7 \approx 286{,}98 < 300$$

La valeur passe sous 300 au rang 7 : elle a été divisée par plus de deux en sept ans.

En sept ans, la baisse globale vaut environ 52 %, car $0{,}9^7 \approx 0{,}478$, et non $7 \times 10 = 70$ %. Réponses : $v_n = 600 \times 0{,}9^n$; $n = 7$.

Réponse. a) $v_n = 600 \times 0{,}9^n$ · b) $n = 7$, car $v_6 \approx 318{,}86$ et $v_7 \approx 286{,}98$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 5 – Un seuil arithmétique

a) On retire 95 à chaque rang : 1200, 1105, 1010, 915, 820 et 725.

b) $u_5 = 725$ est encore au-dessus de 700, mais $u_6 = 1200 - 570 = 630$ est en dessous : le premier rang est $n = 6$.

c) On résout l’inéquation ; diviser par -95, nombre négatif, change le sens :

$$1200 - 95n < 700 \Leftrightarrow -95n < -500 \Leftrightarrow n > \frac{500}{95} \approx 5{,}26$$

Le premier entier qui convient est 6, comme en b). La résolution algébrique est exacte ; le calcul de proche en proche, lui, fonctionne aussi pour une suite géométrique. Réponses : 1200, 1105, 1010, 915, 820, 725 ; $n = 6$; $n > 5{,}26$.

Réponse. a) 1200, 1105, 1010, 915, 820, 725 · b) $n = 6$ · c) $n > 5{,}26$.

Correction de l’exercice 6 – Lire un tableur

a) La formule de B3, recopiée vers le bas, multiplie chaque fois la cellule du dessus par 1,12 : la colonne B contient une suite **géométrique** de premier terme 1800 et de raison 1,12, soit une hausse de 12 % par période.

$$u_n = 1800 \times 1{,}12^n$$

b) B3 contient $1800 \times 1{,}12 = 2016$. Après recopie, B4 contient $= B3 * 1{,}12$, soit environ 2258, et B5 contient $= B4 * 1{,}12$, soit environ 2529.

c) Pour la formule explicite, on multiplie le premier terme B2 par 1,12 élevé à la puissance du rang, lu en colonne A. Il faut **figer** B2 avec des dollars, sinon la référence glisserait vers B3, B4… à la recopie.

Contrôle : $1800 \times 1{,}12^3 \approx 2529$, comme en B5. Réponses : géométrique, $u_n = 1800 \times 1{,}12^n$; 2258 et 2529 ; B2 figée multipliée par 1,12 puissance A3.

Réponse. a) géométrique, $u_n = 1800 \times 1{,}12^n$ · b) 2258 et 2529 · c) une formule du type B2 figée, multipliée par 1,12 puissance A3.

Correction de l’exercice 7 – Un capital et un seuil

a) Le capital est multiplié chaque année par 1,03 : $u_n = 5000 \times 1{,}03^n$. De proche en proche : 5150, 5304,50, 5463,64, 5627,54, 5796,37, 5970,26 et 6149,37 €.

b) On encadre le seuil par deux termes consécutifs :

$$u_6 \approx 5970{,}26 < 6000 < u_7 \approx 6149{,}37$$

Le capital dépasse 6000 € au bout de 7 ans.

En sept ans, il a augmenté d’environ 23 %, un peu plus que $7 \times 3 = 21$ %, car les intérêts rapportent eux-mêmes des intérêts. Réponses : de 5150 à 6149,37 € ; **au bout de** 7 **ans**.

Réponse. a) 5150 à 6149,37 € · b) au bout de 7 ans.

Correction de l’exercice 8 – Croisement de deux suites

a) La suite a ajoute 12 000 par an : 162 000, 174 000, 186 000, 198 000. La suite g multiplie par 1,06 : 159 000, environ 168 540, 178 652, 189 372. Pour l’instant, a reste devant.

b) On poursuit le calcul de proche en proche. L’écart se réduit : $a_8 = 246\,000$ contre $g_8 \approx 239\,077$, puis

$$a_{10} = 270\,000 > g_{10} \approx 268\,627 \qquad a_{11} = 282\,000 < g_{11} \approx 284\,745$$

La suite g dépasse a à partir de $n = 11$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Une croissance géométrique finit toujours par dépasser une croissance arithmétique : au rang 20, g atteint environ 481 070, contre 390 000 pour a. Réponse : **à partir de** $n = 11$.

Réponse. a) a : 162 000 à 198 000 ; g : 159 000 à 189 372 · b) à partir de $n = 11$.

Correction de l’exercice 9 – Un seuil à la baisse

a) Réduire de 25 %, c’est garder 75 % : on multiplie chaque année par 0,75, et $u_n = 64\,000 \times 0{,}75^n$.

b) 48 000, 36 000, 27 000, 20 250, puis environ 15 188 et 11 391.

c) On encadre le seuil :

$$u_5 \approx 15\,188 > 15\,000 \qquad u_6 \approx 11\,391 < 15\,000$$

Le stock passe sous 15 000 pièces au bout de 6 ans.

Les réductions annuelles diminuent, 16 000 pièces la première année contre environ 3800 la sixième, car 25 % s’appliquent à un stock de plus en plus petit. Réponses : $u_n = 64\,000 \times 0{,}75^n$; de 48 000 à 11 391 ; **au bout de** 6 **ans**.

Réponse. a) $u_n = 64\,000 \times 0{,}75^n$ · b) 48 000 à 11 391 · c) au bout de 6 ans.

Correction de l’exercice 10 – Une croissance rapide

a) Une hausse de 25 % par mois revient à multiplier par 1,25 : 400, 500, 625, 781,25, environ 976,56 et 1220,70, que l’on arrondit à l’unité pour des effectifs.

b) On encadre le seuil :

$$u_5 \approx 977 < 1000 \qquad u_6 \approx 1221 > 1000$$

Le réseau dépasse 1000 membres au bout de 6 mois.

En six mois, il est presque multiplié par 4, car $1{,}25^6 \approx 3{,}81$, et sa croissance mensuelle s’accélère : 80 nouveaux membres le premier mois, environ 244 le sixième. Un tel rythme ne peut pas durer, la population totale étant limitée. Réponses : de 400 à 1221 ; **au bout de** 6 **mois**.

Réponse. a) 400 à 1221 · b) au bout de 6 mois.

Correction de l’exercice 11 – Écrire un algorithme de seuil

On utilise deux variables : le rang n et le terme u. Tant que le terme ne dépasse pas 5000, on calcule le terme suivant et l’on augmente le rang de 1.

```
n prend la valeur 0
```

```
u prend la valeur 2000
Tant que u <= 5000
    u prend la valeur u * 1,08
    n prend la valeur n + 1
Fin Tant que
Afficher n
```

L’algorithme calcule successivement 2160, 2332,80, 2519,42… Après 11 tours, $u \approx 4663{,}28$, encore inférieur à 5000 ; après 12 tours, $u \approx 5036{,}34$, et la boucle s’arrête. Il affiche donc

$$n = 12$$

Contrôle : $2000 \times 1{,}08^{12} \approx 5036{,}34$, et $2000 \times 1{,}08^{11} \approx 4663{,}28 \le 5000$. Le premier rang est $n = 12$.

Réponse. Une boucle « tant que » donne $n = 12$, avec $u_{12} \approx 5036{,}34$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 12 – Comparer deux seuils

a) Le capital double quand le coefficient multiplicateur global atteint 2. À 2 %, on calcule $1{,}02^n$: $1{,}02^{35} \approx 1{,}9999$, juste en dessous de 2, et $1{,}02^{36} \approx 2{,}0399$. Il faut donc 36 ans. À 6 % : $1{,}06^{11} \approx 1{,}898$ et $1{,}06^{12} \approx 2{,}012$, soit 12 ans.

$$10\,000 \times 1{,}02^{36} \approx 20\,399 \qquad 10\,000 \times 1{,}06^{12} \approx 20\,122$$

b) Tripler le taux, de 2 % à 6 %, divise à peu près par trois la durée de doublement, de 36 à 12 ans. Une règle pratique en découle : la durée de doublement vaut environ $\dfrac{70}{\text{taux}}$ ans, soit 35 ans à 2 % et environ 11,7 ans à 6 %. Réponses : 36 **ans** à 2 % et 12 **ans** à 6 %.

Réponse. a) 36 ans à 2 %, 12 ans à 6 % · b) la durée est à peu près inversement proportionnelle au taux.

Correction de l’exercice 13 – Un tableur à corriger

La formule de l’élève **multiplie** par 250 : elle produit une suite géométrique de raison 250. Dès la première recopie, B3 vaudrait $4000 \times 250 = 1\,000\,000$, au lieu de 4250.

Une suite arithmétique s’obtient en **ajoutant** la raison. La formule correcte en B3 est

$$= B2 + 250$$

Recopiée vers le bas, elle donne 4250, 4500, 4750, 5000… conformément à la formule explicite $u_n = 4000 + 250n$, qui donne bien $u_4 = 5000$.

Une multiplication n’aurait été juste que pour une suite géométrique, par exemple $= B2 * 1{,}25$ pour une hausse de 25 %. **Leçon** : au tableur, une erreur d’opérateur se propage à toute la colonne ; on vérifie toujours le premier terme calculé à la main. Il faut écrire $= B2 + 250$.

Réponse. Il fallait écrire $= B2 + 250$: une suite arithmétique s’obtient par addition.

Correction de l’exercice 14 – Variations et signe

a) u est arithmétique de raison -120, v est géométrique de raison 0,8 et de premier terme positif : les deux suites sont **décroissantes**.

b) Pour u : $900 - 120n < 0$ équivaut à $n > 7{,}5$, donc u devient négative à partir de $n = 8$, avec $u_8 = -60$. La suite v, produit de nombres positifs, reste toujours positive : elle se rapproche de 0 sans l’atteindre.

c) $u_5 = 900 - 600 = 300$ et

$$v_5 = 900 \times 0{,}8^5 = 900 \times 0{,}32768 \approx 294{,}91$$

donc v_5 est légèrement inférieur à u_5. Mais l’ordre s’inverse ensuite : $u_8 = -60$ alors que $v_8 \approx 151$. Une décroissance arithmétique « plonge », une décroissance géométrique « s’amortit ». Réponses : toutes deux décroissantes ; seule u, **dès** $n = 8$; 300 et ≈ 294,91.

Réponse. a) toutes deux décroissantes · b) seule u, à partir de $n = 8$ · c) $u_5 = 300$ et $v_5 \approx 294{,}91$.

Correction de l’exercice 15 – Un objectif dans un délai

a) Le coefficient multiplicateur global est le quotient de la valeur visée par la valeur actuelle :

$$\frac{250\,000}{180\,000} \approx 1{,}3889$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

soit une hausse globale d'environ 38,9 %.

b) Avec 6 % par an, on obtient en cinq ans $180\,000 \times 1{,}06^5 \approx 240\,881$ € : ce n'est pas suffisant. Avec 7 %, on obtient $180\,000 \times 1{,}07^5 \approx 252\,459$ € : l'objectif est atteint.

c) Avec 7 %, on multiplie chaque année par 1,07 :

année	0	1	2	3	4	5
CA (€)	180 000	192 600	206 082	220 508	235 943	252 459

Piège : répartir les 38,9 % en cinq parts égales de 7,8 %, ce qui dépasserait largement l'objectif. Réponses : ≈ 1,3889 ; 6 % ne suffit pas, 7 % suffit.

Réponse. a) ≈ 1,3889 · b) 6 % ne suffit pas (≈ 240 881 €), 7 % suffit (≈ 252 459 €) · c) de 192 600 à 252 459 €.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : deux scénarios

a) Le scénario A retire le même nombre d'adhérents chaque année : suite arithmétique, $a_n = 2400 - 150n$. Le scénario B retire un pourcentage constant : suite géométrique, $b_n = 2400 \times 0{,}94^n$.

b) $a_5 = 2400 - 750 = 1650$ et $b_5 = 2400 \times 0{,}94^5 \approx 1761$ adhérents.

c) Pour A, $2400 - 150n < 1500$ donne $n > 6$, soit $n = 7$; en $n = 6$, il reste exactement 1500 adhérents. Pour B, $b_7 \approx 1556$ et $b_8 \approx 1463$, soit $n = 8$. C'est donc le scénario **A** qui passe le premier sous 1500 adhérents, dès la septième année.

d) À long terme, A s'annule en 16 ans, alors que B garde encore environ 892 adhérents :

$$a_{16} = 2400 - 2400 = 0 \qquad b_{16} \approx 892$$

Le modèle géométrique est plus réaliste, car les départs sont en général proportionnels au nombre d'adhérents. Réponses : $2400 - 150n$ et $2400 \times 0{,}94^n$; 1650 et ≈ 1761 ; le **scénario A**, dès $n = 7$; B plus réaliste.

Réponse. a) $2400 - 150n$ et $2400 \times 0{,}94^n$ · b) 1650 et environ 1761 · c) le scénario A, dès $n = 7$ · d) B est plus réaliste à long terme.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).