Plaquette 2 – Différentiabilité, classe C1 et contre-exemples

Calcul différentiel — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Implications. $C^1 \Rightarrow$ différentiable $\Rightarrow$ continue, et différentiable $\Rightarrow$ dérivées directionnelles $D_v f(a) = \mathrm{d}f_a(v)$, **linéaires** en v. Aucune réciproque n'est vraie.

Majorations utiles en 0. Avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$: $|x|, |y| \leq r$ et

$$|xy| \leq \frac{r^2}{2}, \qquad \frac{|P(x,y)|}{x^2+y^2} \leq Cr^{d-2} \text{ si } P \text{ est homogène de degré } d$$

Réfuter. Restreindre à une droite $y = mx$ ou à une courbe $y = x^2$: une limite qui dépend du chemin, ou une dérivée directionnelle non linéaire en v, suffit.

Correction de l'exercice 1 – Dérivées partielles sans continuité

a) $f(x,0) = 0$ et $f(0,y) = 0$ pour tout x, y : $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$.

b) Sur la droite $y = mx$ ($x \neq 0$) :

$$f(x, mx) = \frac{m}{1+m^2}$$

qui dépend de m : pas de limite en $(0,0)$.

c) Non : la différentiabilité entraîne la continuité. L'existence des dérivées partielles ne dit rien sur le comportement hors des axes.

Réponse. Dérivées partielles nulles en 0, mais $f(x,mx) = \frac{m}{1+m^2}$: discontinue, donc non différentiable.

Correction de l'exercice 2 – Dérivées directionnelles non linéaires

a) $|f(x,y)| \leq \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y| \to 0$.

b) $\frac{f(ta,tb)}{t} = \frac{a^2 b}{a^2+b^2}$ pour $t \neq 0$ et $v \neq 0$:

$$D_v f(0,0) = \frac{a^2 b}{a^2+b^2}$$

c) Si f était différentiable, $v \mapsto D_v f(0,0)$ serait linéaire ; or elle vaut 0 en $(1,0)$ et $(0,1)$ mais $\frac{1}{2}$ en $(1,1)$. Non différentiable.

Réponse. f continue, $D_v f(0) = \frac{a^2 b}{a^2+b^2}$ non linéaire : non différentiable.

Correction de l'exercice 3 – Différentiable sans être de classe C1

a) $|f(x,y)| \leq r^2 = o(r)$: $f(h) = 0 + 0 \cdot h + o(\|h\|)$.

b) Avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\partial_x r = \frac{x}{r}$:

$$\partial_x f = 2x \sin\frac{1}{r} + r^2 \cos\frac{1}{r} \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) \cdot \frac{x}{r} = 2x \sin\frac{1}{r} - \frac{x}{r}\cos\frac{1}{r}$$

c) Sur l'axe $y = 0$, $x > 0$: $\partial_x f(x,0) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, qui n'a pas de limite en 0 (le second

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

terme oscille). La différentielle existe en 0 mais n'est pas limite des différentielles voisines.

Réponse. $|f| \le r^2$: différentiable en 0 ; $\partial_x f(x,0) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ sans limite : pas C^1.

Correction de l'exercice 4 – Les dérivées croisées diffèrent

a) $\partial_x f(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)}{x} = \frac{y\cdot(-y^2)}{y^2} = -y$ (pour $y \neq 0$, et 0 en $y=0$). De même $\partial_y f(x,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y)}{y} = x$.

b) $\partial_y\partial_x f(0,0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(-y) = -1$ et

$$\partial_x\partial_y f(0,0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1$$

c) f est C^1 mais pas C^2 : les dérivées secondes croisées ne sont pas continues en $(0,0)$, hypothèse indispensable du théorème de Schwarz.

Réponse. $\partial_y\partial_x f(0) = -1 \neq 1 = \partial_x\partial_y f(0)$: f n'est pas C^2.

Correction de l'exercice 5 – Différentiabilité selon un exposant

a) f est nulle sur les axes : $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$.

b) Le candidat est $L = 0$, et

$$|f(x,y)| \le \left(\frac{r^2}{2}\right)^{\alpha} = \frac{r^{2\alpha}}{2^{\alpha}} = o(r) \quad \text{si } 2\alpha > 1$$

c) Sur la diagonale, $f(x,x) = |x|^{2\alpha}$ et $\frac{f(x,x)}{\|(x,x)\|} = \frac{|x|^{2\alpha-1}}{\sqrt{2}}$ ne tend pas vers 0 si $2\alpha \le 1$.

Réponse. Dérivées partielles nulles ; différentiable en 0 ssi $\alpha > \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 6 – Différentiabilité des normes

a) $N = \sqrt{\sum x_i^2}$ est composée de fonctions C^1 là où $\sum x_i^2 > 0$, et

$$\nabla N(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$$

b) $N(te_1) = |t|$ n'est pas dérivable en $t=0$: pas de dérivée partielle, donc pas de différentiabilité.

c) $N_\infty(1+t,1) = 1+t$ pour $t>0$ et 1 pour $t<0$: la dérivée partielle en x n'existe pas en $(1,1)$. Les normes ne sont pas différentiables là où le maximum est atteint par plusieurs coordonnées.

Réponse. $\nabla\|x\|_2 = \frac{x}{\|x\|_2}$ hors de 0 ; $\|\cdot\|_2$ non différentiable en 0, N_∞ non différentiable en $(1,1)$.

Correction de l'exercice 7 – Gradient nul sur un ouvert

a) g est dérivable sur $[0,1]$ et, par la règle de la chaîne,

$$g'(t) = \langle \nabla f(a + t(b-a)), b-a\rangle = 0$$

donc $f(b) = g(1) = g(0) = f(a)$.

b) Dans un ouvert connexe par arcs, deux points sont reliés par une ligne brisée ; on applique a) sur chaque segment (contenu dans une boule incluse dans U, ou directement le long du segment).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $U = \{x \neq 0\} \subset \mathbb{R}$ et $f = 1_{x>0}$: gradient nul, f non constante.

Réponse. $\nabla f = 0$ sur un ouvert connexe par arcs $\Rightarrow$ f constante ; faux sur un ouvert non connexe.

Correction de l'exercice 8 – Fonctions radiales

a) Règle de la chaîne : $\nabla f(x) = g'(\|x\|)\frac{x}{\|x\|}$.

b) $f(h) - f(0) = g(\|h\|) - g(0) = g'(0)\|h\| + o(\|h\|) = o(\|h\|)$: différentiable de différentielle nulle. Et

$$\|\nabla f(x)\| = |g'(\|x\|)| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} |g'(0)| = 0$$

donc ∇f est continue en 0.

c) $g(r) = r$: $f = \|\cdot\|$, non différentiable en 0 ($g'(0) = 1 \neq 0$). $g(r) = r^2$: $f = \|x\|^2$, de gradient $2x$, de classe C^∞.

Réponse. $\nabla f = g'(\|x\|)\frac{x}{\|x\|}$; C^1 sur $\mathbb{R}^n$ si $g'(0) = 0$.

Correction de l'exercice 9 – Une fonction homogène de degré un

a) $|f| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{r^2} \leq 2r$. $f(x,0) = x$ et $f(0,y) = -y$: $\partial_x f(0) = 1$, $\partial_y f(0) = -1$.

b) $f(h,k) - (h-k) = \frac{h^3 - k^3 - (h-k)(h^2+k^2)}{h^2+k^2} = \frac{hk(h-k)}{h^2+k^2}$. Pour $k = -h$:

$$\frac{-h^2 \cdot 2h}{2h^2} = -h$$

qui n'est pas $o(\|(h,-h)\|)$: non différentiable.

c) Si $f(tx) = tf(x)$ et f est différentiable en 0 : $f(x) = \frac{f(tx)}{t} \to \mathrm{d}f_0(x)$ quand $t \to 0^+$, donc $f = \mathrm{d}f_0$ est linéaire. Ici f n'est pas linéaire.

Réponse. $\partial_x f(0) = 1$, $\partial_y f(0) = -1$, mais $f(h,-h) - 2h = -h$: non différentiable.

Correction de l'exercice 10 – Approximation au premier ordre

a) $\partial_x f = 3x^2y^2$, $\partial_y f = 2x^3y$: $\mathrm{d}f_{(1,1)}(h,k) = 3h + 2k$.

b) $f(1{,}02; 0{,}97) \approx 1 + 3 \times 0{,}02 + 2 \times (-0{,}03) = 1$.

c) Valeur exacte $\approx 0{,}99849$. L'erreur est d'ordre 2 : $\frac{1}{2}\left(6h^2 + 2 \cdot 6hk + 2k^2\right)$ avec $\partial_x^2 f = 6$, $\partial_{xy} f = 6$, $\partial_y^2 f = 2$ en $(1,1)$, soit

$$\frac{1}{2}(6 \times 0{,}0004 + 12 \times (-0{,}0006) + 2 \times 0{,}0009) = -0{,}0015$$

conforme à l'écart observé.

Réponse. $\mathrm{d}f_{(1,1)}(h,k) = 3h + 2k$; approximation 1, valeur exacte $\approx 0{,}9985$ (correction d'ordre 2 : $-0{,}0015$).

Correction de l'exercice 11 – Inégalité des accroissements finis

a) $g(t) = f(a + t(b-a))$, $g'(t) = \langle \nabla f, b - a \rangle$, donc par Cauchy-Schwarz $|g'(t)| \leq M\|b-a\|$, puis l'inégalité des accroissements finis en une variable.

b) $\nabla f = (\cos x \cos y, -\sin x \sin y)$ et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\|\nabla f\|^2 = \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y \le \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

c) Oui en général : sur $U = \mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite $\{y = 0, x \le 0\}$, l'argument $\theta \in]-\pi, \pi[$ a un gradient de norme $\frac{1}{r}$, borné hors d'un voisinage de 0, mais $\theta(-1, \varepsilon) - \theta(-1, -\varepsilon) \to 2\pi$ pour des points arbitrairement proches.

Réponse. $|f(b) - f(a)| \le \sup \|\nabla f\| \, \|b - a\|$ sur un convexe ; $\sin x \cos y$ est 1-lipschitzienne.

Correction de l'exercice 12 – Un sinus cardinal à deux variables

a) Pour $x \neq 0$: $\frac{\sin(xy)}{x} = y\frac{\sin(xy)}{xy}$ (si $y \neq 0$), et $\frac{\sin u}{u} = S(u)$; pour $x = 0$ ou $y = 0$, l'égalité est immédiate ($S(0) = 1$).

b) S est une série entière de rayon infini, donc C^∞ ; $(x, y) \mapsto xy$ et $(x, y) \mapsto y$ aussi : par composition et produit, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

c) $\partial_x f = y^2 S'(xy)$ et $\partial_y f = S(xy) + xyS'(xy)$, avec $S'(0) = 0$:

$$\nabla f(0, y) = (0, 1)$$

Réponse. $f = y\,S(xy)$ avec S série entière : $f \in C^\infty$, $\nabla f(0, y) = (0, 1)$.

Correction de l'exercice 13 – Un produit par un logarithme

a) $|f| \le \frac{r^2}{2} \cdot 2|\ln r| = r^2|\ln r| = o(r)$.

b) $\partial_x f = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}$, et

$$|\partial_x f| \le 2r|\ln r| + 2r \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0 = \partial_x f(0, 0)$$

c) De même pour $\partial_y f$ (symétrie) ; hors de l'origine f est C^1 ; les dérivées partielles sont continues en 0 : $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Réponse. $|f| \le r^2|\ln r|$, dérivées partielles $O(r|\ln r|) \to 0$: f est C^1.

Correction de l'exercice 14 – Direction de plus grande pente

a) $\nabla f = (2x, 4y)$, $\nabla f(a) = (2, 4)$, et $D_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle = 2\cos\theta + 4\sin\theta$.

b) Par Cauchy-Schwarz, $D_u f(a) \le \|\nabla f(a)\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, avec égalité pour

$$u = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} = \frac{(1, 2)}{\sqrt{5}}$$

c) $D_u f(a) = 0 \Leftrightarrow u \perp (1, 2)$, soit $u = \pm\frac{(2, -1)}{\sqrt{5}}$: direction de la tangente à l'ellipse de niveau $x^2 + 2y^2 = 3$ en a.

Réponse. $D_u f(a) = 2\cos\theta + 4\sin\theta \le 2\sqrt{5}$, maximum selon $\frac{(1, 2)}{\sqrt{5}}$; nulle selon la tangente à la ligne de niveau.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : dérivées directionnelles sans continuité

a) Sur $y = mx$: $f(x, mx) = \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4} = \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2} \to 0$; sur l'axe $x = 0$, $f = 0$.

b) $f(y^2, y) = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$ pour $y \neq 0$: pas de limite nulle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Pour $a \neq 0$: $\dfrac{f(ta,tb)}{t} = \dfrac{ab^2}{a^2+t^2b^4} \to \dfrac{b^2}{a}$; pour $a = 0$: 0. Donc

$$D_v f(0,0) = \frac{b^2}{a} \ (a \neq 0), \qquad D_v f(0,0) = 0 \ (a = 0)$$

d) f admet des dérivées dans toutes les directions mais n’est même pas continue (et $v \mapsto D_v f(0)$ n’est pas linéaire) : l’existence de toutes les dérivées directionnelles n’entraîne ni la continuité ni la différentiabilité.

Réponse. Continue sur chaque droite, mais $f(y^2, y) = \frac{1}{2}$; $D_v f(0) = \frac{b^2}{a}$: dérivées directionnelles sans continuité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).