Plaquette 1 – Différentielle, gradient, règle de la chaîne et difféomorphismes

Calcul différentiel — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Différentielle. $f : U \subset E \to F$ est différentiable en a s'il existe une application **linéaire continue** $\mathrm{d}f_a$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + o(\|h\|)$$

— $\mathrm{d}f_a$ est **unique** ; sa matrice dans les bases canoniques est la **jacobienne** $J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$.

— **Fonction réelle** : $\mathrm{d}f_a(h) = \langle \nabla f(a), h\rangle$ avec $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

— **Classe** C^1 : toutes les dérivées partielles existent et sont **continues** ; cela **entraîne** la différentiabilité (la réciproque est fausse).

Règle de la chaîne. $\mathrm{d}(g\circ f)_a = \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a$, soit matriciellement $J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$.

— **Cas courbe** : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)),\, \gamma'(t)\rangle$.

— **Dérivée directionnelle** : $D_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \langle \nabla f(a), v\rangle$.

Propriétés du gradient.

— Il est **orthogonal** aux lignes de niveau et pointe dans la direction de **plus forte croissance** ; $\|\nabla f(a)\|$ est le taux maximal de variation.

— **Point critique** : $\nabla f(a) = 0$ — condition **nécessaire** d'extremum local intérieur.

Ordre 2. Pour f de classe C^2 : **théorème de Schwarz** ($\partial_{ij} f = \partial_{ji} f$), **hessienne** symétrique $H_f(a)$, et

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2}\,{}^{\mathrm{T}}h H_f(a) h + o\left(\|h\|^2\right)$$

Inversion locale. Si f est C^1 et $J_f(a)$ **inversible**, alors f est un C^1**-difféomorphisme** d'un voisinage de a sur un voisinage de $f(a)$, et $J_{f^{-1}}(f(a)) = J_f(a)^{-1}$.

Correction de l'exercice 1 – Différentielle d'une forme quadratique

— **Dérivées partielles** : $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 2y$.

— **Gradient en** $(1,2)$: $\nabla f(1,2) = (2+6,\ 3+4) = (8,7)$.

— **Différentielle** : $\mathrm{d}f_{(1,2)}(h,k) = 8h + 7k$.

— **Vérification par développement** : avec $x = 1+h$, $y = 2+k$,

$$f = (1+h)^2 + 3(1+h)(2+k) + (2+k)^2 = 11 + 8h + 7k + \left(h^2 + 3hk + k^2\right)$$

— Le terme d'ordre 1 est bien $8h + 7k$, et le reste est un $O\left(\|(h,k)\|^2\right)$ ✓

— **Interprétation** : le gradient $(8,7)$ indique la direction de plus forte croissance au point $(1,2)$; la croissance maximale y vaut $\|(8,7)\| = \sqrt{113} \approx 10{,}63$ par unité de

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

déplacement.

Réponse. $\nabla f(1,2) = (8,7)$ et $\mathrm{d}f(h,k) = 8h + 7k$.

Correction de l'exercice 2 – Jacobienne

— **Dérivées partielles** :

$$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

— **Déterminant** : $r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$.

— **Inversibilité** : J_f est inversible **si et seulement si** $r \neq 0$.

— **Conséquence (inversion locale)** : f est un difféomorphisme local en tout point où $r > 0$; l'origine est un point singulier du système de coordonnées.

— **Application au changement de variable** : $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ — le facteur r est exactement ce **jacobien**.

— **Contrôle** : l'aire d'un disque de rayon R vaut $\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\dfrac{R^2}{2} = \pi R^2$ ✓

Réponse. $\det J_f = r$; difféomorphisme local pour $r \neq 0$.

Correction de l'exercice 3 – Règle de la chaîne

Méthode 1 — chaîne.

— $\nabla f = \left(2xy,\, x^2\right)$, donc $\nabla f(\gamma(t)) = \left(2\cos t\sin t,\, \cos^2 t\right)$.

— $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\circ\gamma = -2\cos t\sin^2 t + \cos^3 t$$

Méthode 2 — calcul direct. $f(\gamma(t)) = \cos^2 t\sin t$.

— Dérivée : $-2\cos t\sin t\cdot\sin t + \cos^2 t\cos t = -2\cos t\sin^2 t + \cos^3 t$ ✓ — identique.

— **Contrôle en** $t = 0$: les deux donnent 1 ; et $f\circ\gamma(t) = \cos^2 t\sin t \approx t$ près de 0 ✓

— **Lecture** : la dérivée est le produit scalaire du **gradient** (direction de croissance) par la **vitesse** — elle est nulle quand on se déplace le long d'une ligne de niveau.

Réponse. $\cos^3 t - 2\cos t\sin^2 t$ par les deux méthodes.

Correction de l'exercice 4 – Dérivée directionnelle

— **Gradient** : $\nabla f = (yz,\, xz,\, xy)$, donc $\nabla f(1,1,1) = (1,1,1)$.

— **Dérivée directionnelle** :

$$D_v f(1,1,1) = \langle \nabla f, v\rangle = \frac{1+1+1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1{,}732$$

— **Maximalité** : v est colinéaire à ∇f, donc cette direction est celle de **plus forte croissance**, et la valeur obtenue est exactement $\|\nabla f\| = \sqrt{3}$ ✓

— **Comparaison** : dans la direction $w = \dfrac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$, on obtient $\dfrac{1-1}{\sqrt{2}} = 0$ — on se déplace le long d'une **ligne de niveau**.

— **Cauchy-Schwarz** : $|D_v f| \leq \|\nabla f\|$ pour tout v unitaire, avec égalité si et seulement si v est colinéaire au gradient.

Réponse. $D_v f = \sqrt{3}$ — c'est la croissance maximale.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Ligne de niveau et gradient

— **Lignes de niveau** : $f(x,y) = c$ décrit le **cercle** de rayon $\sqrt{c}$ centré à l'origine.
— **Paramétrage** : $\gamma(t) = \sqrt{c}\,(\cos t, \sin t)$, de vecteur tangent $\gamma'(t) = \sqrt{c}\,(-\sin t, \cos t)$.
— **Gradient** : $\nabla f = (2x, 2y) = 2\sqrt{c}\,(\cos t, \sin t)$ le long de la courbe.
— **Produit scalaire** : $2c(-\cos t \sin t + \sin t \cos t) = 0$ ✓
— **Démonstration générale** : $f \circ \gamma$ est **constante** le long d'une ligne de niveau, donc sa dérivée $\langle \nabla f, \gamma' \rangle$ est nulle — le gradient est orthogonal à **tout** vecteur tangent.
— **Conséquence pratique** : pour trouver la normale à une courbe d'équation $f(x,y) = c$, il suffit de calculer ∇f — par exemple la normale à l'ellipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ au point $(0,1)$ est dirigée par $(0,2)$.

Réponse. $f \circ \gamma$ constante $\Rightarrow \langle \nabla f, \gamma' \rangle = 0$.

Correction de l'exercice 6 – Théorème de Schwarz

— **Dérivées premières** : $\partial_x f = 3x^2y - y^3$ et $\partial_y f = x^3 - 3xy^2$.
— **Dérivées croisées** :
— $\partial_y\left(3x^2y - y^3\right) = 3x^2 - 3y^2$;
— $\partial_x\left(x^3 - 3xy^2\right) = 3x^2 - 3y^2$ ✓ — égales, conformément à Schwarz (f est C^∞).
— **Dérivées secondes pures** : $\partial_{xx} f = 6xy$ et $\partial_{yy} f = -6xy$.
— **Hessienne en** $(1,1)$:

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

— **Nature** : les valeurs propres 6 et -6 sont de **signes opposés** — si $(1,1)$ était un point critique, ce serait un **point col**.
— **Vérification** : $\nabla f(1,1) = (3-1,\ 1-3) = (2,-2) \neq 0$ — ce n'est pas un point critique ; la hessienne y décrit simplement la courbure locale.

Réponse. Les deux dérivées croisées valent $3x^2 - 3y^2$; $H_f(1,1) = \mathrm{diag}(6,-6)$.

Correction de l'exercice 7 – Différentiabilité et dérivées partielles

— **Dérivées partielles en** 0 : $\dfrac{f(t,0)-0}{t} = \dfrac{t^3/t^2}{t} = 1$, donc $\partial_x f(0,0) = 1$; $\dfrac{f(0,t)}{t} = 0$, donc $\partial_y f(0,0) = 0$.
— **Candidat pour la différentielle** : $L(h,k) = h$.
— **Test** : on calcule $\dfrac{f(h,k) - L(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$.

$$f(h,k) - h = \frac{h^3 - h(h^2+k^2)}{h^2+k^2} = \frac{-hk^2}{h^2+k^2}$$

— **Le long de** $k = h$: le numérateur vaut $-\dfrac{h^3}{2h^2} = -\dfrac{h}{2}$, et le quotient par $\sqrt{2}\,|h|$ vaut $\mp\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$.
— Le reste n'est **pas** un $o(\|(h,k)\|)$: f n'est **pas différentiable** en $(0,0)$.
— **Leçon** : l'existence des dérivées partielles **ne suffit pas**. Il faut leur **continuité** (classe C^1) pour garantir la différentiabilité.

Réponse. Non : le reste ne tend pas assez vite vers 0 le long de $y = x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Inversion locale

— **Jacobienne** :

$$J_f = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}, \qquad \det J_f = e^{2x} > 0$$

— Le déterminant ne s'annule **jamais** : par le théorème d'**inversion locale**, f est un C^1-difféomorphisme au voisinage de **chaque** point.

— **Non-injectivité globale** : $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$ — la fonction est 2π-périodique en y.

— **Conclusion** : « difféomorphisme **local** partout » n'implique **pas** « difféomorphisme global ».

— **Identification** : en notant $z = x + iy$, on a $f(z) = e^z$ — c'est l'exponentielle complexe, dont on sait qu'elle est surjective sur $\mathbb{C}^*$ mais non injective.

— **Réciproque locale** : c'est une détermination du **logarithme complexe**, définie sur un plan fendu.

Réponse. $\det J_f = e^{2x} \neq 0$ (local), mais f est 2π-périodique en y.

Correction de l'exercice 9 – Fonctions homogènes

On **dérive** l'identité $f(tx, ty) = t^p f(x, y)$ par rapport à t.

— **Membre de gauche (règle de la chaîne)** : $x\,\partial_x f(tx, ty) + y\,\partial_y f(tx, ty)$.

— **Membre de droite** : $pt^{p-1} f(x, y)$.

— **En** $t = 1$:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = p f(x, y)$$

— C'est la **relation d'Euler**.

— **Exemple** : $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$ est homogène de degré 1. Alors

$$x \cdot \frac{2x}{y} + y \cdot \left(-\frac{x^2}{y^2} \right) = \frac{2x^2}{y} - \frac{x^2}{y} = \frac{x^2}{y} = f \checkmark$$

— **Applications** : en économie (rendements d'échelle), en thermodynamique (grandeurs extensives), en physique (analyse dimensionnelle).

Réponse. Dériver en t puis prendre $t = 1$: $x\partial_x f + y\partial_y f = pf$.

Correction de l'exercice 10 – Équation aux dérivées partielles

— **Changement de variables** : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, et $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

— **Règle de la chaîne** :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\,\partial_x f + \sin\theta\,\partial_y f = \frac{1}{r}\left(x\partial_x f + y\partial_y f \right)$$

— L'équation devient donc $\dfrac{\partial g}{\partial r} = 0$: g ne dépend **pas de** r.

— **Solutions** : $g(r, \theta) = \varphi(\theta)$ pour une fonction φ de classe C^1 arbitraire.

— **Retour aux variables initiales** : sur le demi-plan $x > 0$, $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$, donc

$$f(x, y) = \varphi\left(\arctan\frac{y}{x} \right) = \psi\left(\frac{y}{x} \right)$$

— **Vérification** avec $\psi(u) = u$, soit $f = \dfrac{y}{x}$: $x\left(-\dfrac{y}{x^2} \right) + y\dfrac{1}{x} = -\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x} = 0$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Interprétation** : f est **constante le long des demi-droites** issues de l'origine — ce sont les courbes caractéristiques de l'équation.

Réponse. $f(x,y) = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ avec ψ de classe C^1.

Correction de l'exercice 11 – Hessienne et extremum

— **Points critiques** : $\nabla f = \left(3x^2 - 3y,\ 3y^2 - 3x\right) = 0$ donne $y = x^2$ et $x = y^2 = x^4$, donc $x \in \{0, 1\}$.
— Points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$.
— **Hessienne** : $H_f = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$.

En $(1,1)$: $H = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

— Mineurs dominants : $6 > 0$ et $36 - 9 = 27 > 0$ — **définie positive** (critère de Sylvester).
— Donc $(1,1)$ est un **minimum local**, de valeur $f(1,1) = -1$.

En $(0,0)$: $H = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant $-9 < 0$.

— Les valeurs propres ± 3 sont de signes opposés : **point col**.
— **Vérification** : $f(x,x) = 2x^3 - 3x^2 < 0$ pour x petit > 0, et $f(x,-x) = 3x^2 > 0$ ✓
— **Règle en dimension 2** : $\det H < 0 \Rightarrow$ point col ; $\det H > 0$ et $\partial_{xx} f > 0 \Rightarrow$ minimum ; $\det H = 0$: cas **indécis**.

Réponse. $(1,1)$ minimum local (-1) ; $(0,0)$ point col.

Correction de l'exercice 12 – Différentielle du déterminant

a) det est polynomiale donc de classe C^1. $\det(I + tH) = \prod(1 + t\lambda_i)$ (valeurs propres complexes de H) $= 1 + t\mathrm{tr}H + O(t^2)$; la différentielle est la dérivée en $t = 0$: $\mathrm{tr}H$.

b) $\det(M + H) = \det M\left(1 + \mathrm{tr}(M^{-1}H) + o(\|H\|)\right)$, donc

$$\mathrm{d}(\det)_M(H) = \det(M)\mathrm{tr}(M^{-1}H)$$

c) $\det(M)M^{-1} = \mathrm{com}(M)^{\mathsf{T}}$. Les deux membres sont continus en M (polynomiaux) et égaux sur $GL_n(\mathbb{R})$, dense : égalité partout.

Réponse. $\mathrm{d}(\det)_I = \mathrm{tr}$ et $\mathrm{d}(\det)_M(H) = \mathrm{tr}(\mathrm{com}(M)^{\mathsf{T}}H)$.

Correction de l'exercice 13 – Différentielle de l'inversion

a) $(M+H)^{-1} = (I + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} = \sum_k (-M^{-1}H)^k M^{-1}$, et les termes $k \geq 2$ ont une norme $\leq \dfrac{\|M^{-1}\|^3 \|H\|^2}{1 - \|M^{-1}\|\|H\|}$.

b) L'application $H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$ est linéaire, et le reste est $o(\|H\|)$:

$$\mathrm{d}\varphi_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}$$

c) $n = 1$: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$. En I : $\mathrm{d}\varphi_I(H) = -H$.

Réponse. $\mathrm{d}\varphi_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}$; en I, $-H$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – L’équation des ondes

a) Règle de la chaîne : $\partial_x f = g_u + g_v$, $\partial_t f = c(g_u - g_v)$, puis

$$\partial_x^2 f = g_{uu} + 2g_{uv} + g_{vv}, \qquad \partial_t^2 f = c^2(g_{uu} - 2g_{uv} + g_{vv})$$

(Schwarz : $g_{uv} = g_{vu}$).

b) L’équation devient $c^2(-4g_{uv}) = 0$.

c) $\partial_u(\partial_v g) = 0$: $\partial_v g = \psi_1(v)$ ne dépend que de v, puis $g(u,v) = \psi(v) + \varphi(u)$ avec ψ primitive de ψ_1. Superposition de deux ondes progressives de vitesse c, en sens opposés.

Réponse. $g_{uv} = 0$, donc $f(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : différentielle d’une application matricielle

— **Développement** : $f(M+H) = (M+H)^2 = M^2 + MH + HM + H^2$.

— Le terme $MH + HM$ est **linéaire en** H ; le terme H^2 vérifie $\|H^2\| \leq \|H\|^2 = o(\|H\|)$.

$$\mathrm{d}f_M(H) = MH + HM$$

— **Attention** : ce n’est **pas** $2MH$, car le produit matriciel n’est pas commutatif.

— **En** $M = I$: $\mathrm{d}f_I(H) = H + H = 2H$, donc $\mathrm{d}f_I = 2\,\mathrm{id}$ — inversible.

— **Conséquence (inversion locale)** : $M \mapsto M^2$ est un difféomorphisme local au voisinage de I ; toute matrice **proche de** I admet donc une **racine carrée**, proche de I et unique parmi celles-ci.

— **Contrôle** : $\mathrm{d}f_M$ est inversible si et seulement si $X \mapsto MX + XM$ l’est, ce qui échoue lorsque M et $-M$ partagent une valeur propre — par exemple pour M nilpotente.

Réponse. $\mathrm{d}f_M(H) = MH + HM$, et $\mathrm{d}f_I(H) = 2H$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).