Plaquette 4 – Différentielles dans les espaces vectoriels normés et accroissements finis

Calcul différentiel — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Différentiabilité. $f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + o(\|h\|)$, avec $\mathrm{d}f_a$ linéaire (continue en dimension finie).

Règles. $\mathrm{d}(B(f,g))_a(h) = B(\mathrm{d}f_a(h), g(a)) + B(f(a), \mathrm{d}g_a(h))$ pour B bilinéaire, et

$$\mathrm{d}(g\circ f)_a = \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a$$

Exemples de référence. $\mathrm{d}(M\mapsto M^2)_A(H) = AH+HA$; $\mathrm{d}(M\mapsto M^{-1})_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}$; $\mathrm{d}(x\mapsto \|x\|^2)_a(h) = 2\langle a,h\rangle$.

Accroissements finis. Sur un ouvert convexe, si $\|\mathrm{d}f_x\| \le k$ pour tout x, f est k-lipschitzienne ; sur un ouvert connexe par arcs, $\mathrm{d}f = 0 \Rightarrow f$ constante.

Correction de l'exercice 1 – Différentielle de M ↦ M³

a) Sans commutativité :

$$(A+H)^3 = A^3 + \left(A^2H + AHA + HA^2\right) + \left(AH^2 + HAH + H^2A\right) + H^3$$

donc $\mathrm{d}f_A(H) = A^2H + AHA + HA^2$.

b) Avec une norme sous-multiplicative, le reste est majoré par $3\|A\|\|H\|^2 + \|H\|^3 = o(\|H\|)$.

c) $\mathrm{d}(M^p)_A(H) = \sum_{k=0}^{p-1} A^k H A^{p-1-k}$; si A et H commutent, on retrouve $pA^{p-1}H$.

Réponse. $\mathrm{d}f_A(H) = A^2H + AHA + HA^2$; en général $\sum_{k=0}^{p-1} A^k H A^{p-1-k}$.

Correction de l'exercice 2 – Différentielle de l'application trace-produit

a) $f(M) = \|M\|^2$ pour la norme de Frobenius ; $f(A+H) = f(A) + 2\mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}H) + f(H)$, donc $\mathrm{d}f_A(H) = 2\mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}H)$.

b) $\mathrm{d}f_A(H) = \langle 2A, H\rangle$: $\nabla f(A) = 2A$.

c) $\mathrm{d}g_A(H) = \mathrm{tr}(AH+HA) = 2\mathrm{tr}(AH) = \langle 2A^{\mathsf{T}}, H\rangle$, donc

$$\nabla g(A) = 2A^{\mathsf{T}}$$

Réponse. $\nabla f(A) = 2A$ et $\nabla g(A) = 2A^{\mathsf{T}}$.

Correction de l'exercice 3 – Gradient du logarithme du déterminant

a) U est l'image réciproque de $]0,+\infty[$ par det, continue ; $f = \ln\circ\det$ est différentiable comme composée.

b) Règle de la chaîne avec $\mathrm{d}(\det)_A(H) = \mathrm{tr}(\mathrm{com}(A)^{\mathsf{T}}H) = \det A\,\mathrm{tr}(A^{-1}H)$:

$$\mathrm{d}f_A(H) = \frac{\det A\,\mathrm{tr}(A^{-1}H)}{\det A} = \mathrm{tr}(A^{-1}H)$$

c) $\mathrm{tr}(A^{-1}H) = \langle (A^{-1})^{\mathsf{T}}, H\rangle$: $\nabla f(A) = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\mathrm{d}f_A(H) = \operatorname{tr}(A^{-1}H)$, $\nabla f(A) = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$.

Correction de l'exercice 4 – Différentiabilité de la norme euclidienne

a) $N = \sqrt{\varphi}$ avec $\varphi(x) = \|x\|^2$, $\mathrm{d}\varphi_a(h) = 2\langle a, h\rangle$ et $\varphi(a) > 0$: $\mathrm{d}N_a(h) = \dfrac{2\langle a, h\rangle}{2\sqrt{\varphi(a)}}$.

b) Sinon $t \mapsto N(th) = |t|\|h\|$ serait dérivable en 0 pour tout $h \neq 0$, ce qui est faux.

c) $\|(1+s, t)\|_1 = 1 + s + |t|$ près de $(1, 0)$: la dérivée partielle en t n'existe pas, donc $\|\cdot\|_1$ n'est pas différentiable en $(1, 0)$.

Réponse. $\mathrm{d}N_a(h) = \dfrac{\langle a, h\rangle}{\|a\|}$ hors de 0 ; non différentiable en 0 ; $\|\cdot\|_1$ non différentiable en $(1, 0)$.

Correction de l'exercice 5 – Application bilinéaire et produit vectoriel

a) $B(a+h, b+k) - B(a, b) = B(a, k) + B(h, b) + B(h, k)$, et en dimension finie

$$\|B(h, k)\| \leq C\|h\|\|k\| = o(\|(h, k)\|)$$

b) Règle de la chaîne avec $t \mapsto (u(t), v(t))$.

c) $(u \wedge u')' = u' \wedge u' + u \wedge u'' = 0 - \omega^2 u \wedge u = 0$: c'est la conservation du moment cinétique pour une force centrale.

Réponse. $\mathrm{d}B_{(a,\,b)}(h, k) = B(a, k) + B(h, b)$; $u \wedge u'$ est constant.

Correction de l'exercice 6 – Application multilinéaire : le déterminant en colonnes

a) En développant par multilinéarité, $\varphi(x + h) = \varphi(x) + \sum_i \det(x_1, \ldots, h_i, \ldots, x_n) + R$, où R regroupe les termes contenant au moins deux h_i : $\|R\| \leq C\|h\|^2$.

b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i \det(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n)$.

c) $\det\begin{pmatrix} -\sin t & -\sin t \\ \cos t & \cos t \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \cos t & -\cos t \\ \sin t & -\sin t \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0$, cohérent avec un déterminant constant égal à 1.

Réponse. Dérivée $= \sum_i \det(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n)$; ici 0.

Correction de l'exercice 7 – Différentielle de l'exponentielle en zéro

a) $\exp(H) - I_n - H = \sum_{k \geq 2} \dfrac{H^k}{k!}$, de norme au plus $\sum_{k \geq 2} \dfrac{\|H\|^k}{k!} \leq \|H\|^2 \sum_{j \geq 0} \dfrac{\|H\|^j}{j!}$.

b) Le reste est un $O(\|H\|^2)$: $\exp(H) = I_n + H + o(\|H\|)$.

c) Si A et H commutent, $\exp(A + H) = \exp(A)\exp(H)$. Pour tH :

$$\frac{\exp(A + tH) - \exp(A)}{t} = \exp(A)\frac{\exp(tH) - I_n}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \exp(A)H$$

(dans le cas général, $\mathrm{d}\exp_A(H)$ n'a pas cette forme simple).

Réponse. $\mathrm{d}\exp_0 = \mathrm{id}$; dans une direction commutant avec A, dérivée $\exp(A)H$.

Correction de l'exercice 8 – Inégalité des accroissements finis : un contre-exemple

a) $f(2\pi) - f(0) = 0$ alors que $\|f'(c)\| = 1$ pour tout c : aucune égalité possible.

b) $\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a)\sup_{[a,\,b]}\|f'\|$; ici $0 \leq 2\pi$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\|f(\pi)-f(0)\| = \|(-2,0)\| = 2$ et

$$\pi \sup \|f'\| = \pi$$

on a bien $2 \le \pi$: la corde est plus courte que l'arc.

Réponse. Pas d'égalité vectorielle ; seule l'inégalité $\|f(b)-f(a)\| \le (b-a)\sup\|f'\|$ subsiste ($2 \le \pi$).

Correction de l'exercice 9 – Fonction lipschitzienne par la différentielle

a) $J_f = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ -\frac{1}{2}\sin(x-y) & \frac{1}{2}\sin(x-y) \end{pmatrix}$.

b) $\|J\|_{\mathrm{op}} \le \|J\|_F = \sqrt{2\cos^2(x+y) + \frac{1}{2}\sin^2(x-y)} \le \sqrt{\frac{5}{2}}$.

c) $\mathbb{R}^2$ est convexe, donc par l'inégalité des accroissements finis f est $\sqrt{5/2}$-lipschitzienne. On peut affiner : les lignes de J sont orthogonales, donc $JJ^{\mathsf{T}} = \mathrm{diag}\left(2\cos^2(x+y), \frac{1}{2}\sin^2(x-y)\right)$ et

$$\|J\|_{\mathrm{op}} = \max\left(\sqrt{2}\,|\cos(x+y)|, \frac{|\sin(x-y)|}{\sqrt{2}}\right) \le \sqrt{2}$$

ce qui donne $k = \sqrt{2}$, valeur optimale (atteinte en $x = y = 0$).

Réponse. f est $\sqrt{5/2}$-lipschitzienne (et même $\sqrt{2}$-lipschitzienne).

Correction de l'exercice 10 – Différentielle nulle sur un connexe

a) Pour $a, b \in U$, $g(t) = f(a + t(b-a))$ vérifie $g'(t) = \mathrm{d}f_{a+t(b-a)}(b-a) = 0$: $g(1) = g(0)$.

b) Le long de chaque segment de la ligne brisée, f est constante (le segment est dans U), donc $f(a) = f(b)$.

c) Sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ -1 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

a une différentielle nulle mais n'est pas constante.

Réponse. Constante sur un connexe par arcs ; contre-exemple sur le plan privé d'une droite.

Correction de l'exercice 11 – Vecteurs tangents au groupe orthogonal

a) $\Phi(A+H) = A^{\mathsf{T}}A + A^{\mathsf{T}}H + H^{\mathsf{T}}A + H^{\mathsf{T}}H$, donc $\mathrm{d}\Phi_A(H) = A^{\mathsf{T}}H + H^{\mathsf{T}}A$.

b) $\Phi(M(t)) = I_n$, constante ; en dérivant en 0 :

$$\mathrm{d}\Phi_{I_n}(M'(0)) = M'(0) + M'(0)^{\mathsf{T}} = 0$$

c) $\exp(tA)^{\mathsf{T}} = \exp(tA^{\mathsf{T}}) = \exp(-tA)$, qui commute avec $\exp(tA)$: le produit vaut $\exp(0) = I_n$. La dérivée en 0 est A. Les vecteurs tangents à $O_n(\mathbb{R})$ en I_n sont exactement les matrices antisymétriques.

Réponse. $\mathrm{d}\Phi_A(H) = A^{\mathsf{T}}H + H^{\mathsf{T}}A$; tangentes à O_n en I_n = antisymétriques.

Correction de l'exercice 12 – Inégalité des accroissements finis pour l'inverse

a) $\|\mathrm{d}f_A(H)\| \le \|A^{-1}\|^2\|H\|$, donc $\|\mathrm{d}f_A\| \le \|A^{-1}\|^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Accroissements finis sur le segment (convexe) : $\|\mathrm{d}f\| \le c^2$ le long de $[A,B]$, d'où l'inégalité.

c) $B^{-1}(A-B)A^{-1} = B^{-1}AA^{-1} - B^{-1}BA^{-1} = B^{-1} - A^{-1}$, et

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \le \|B^{-1}\|\|A^{-1}\|\|A-B\| \le c^2\|B-A\|$$

(la version directe n'utilise que les extrémités du segment).

Réponse. $\|\mathrm{d}f_A\| \le \|A^{-1}\|^2$, d'où $\|B^{-1} - A^{-1}\| \le c^2\|B-A\|$.

Correction de l'exercice 13 – Différentielle d'une application polynomiale

a) $\Phi(P+H) = \Phi(P) + (2PH + H') + H^2$; $P \mapsto P'$ est linéaire et $H^2 = O(\|H\|^2)$ (application bilinéaire en dimension finie) : $\mathrm{d}\Phi_P(H) = 2PH + H'$.

b) $\mathrm{d}\Phi_0(H) = H'$: noyau $= \mathbb{R}_0[X]$ (constantes). $\mathrm{d}\Phi_1(H) = 2H + H'$: si $2H + H' = 0$, le terme de plus haut degré donne $2a_d = 0$, donc noyau $= \{0\}$.

c) $\mathrm{d}\Phi_X(H) = 2XH + H'$; $H = 1 \mapsto 2X$, $H = X \mapsto 2X^2 + 1$. Dans $(1, X)$ et $(1, X, X^2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Réponse. $\mathrm{d}\Phi_P(H) = 2PH + H'$; $\ker \mathrm{d}\Phi_0 =$ constantes, $\ker \mathrm{d}\Phi_1 = \{0\}$.

Correction de l'exercice 14 – Une fonction différentiable de différentielle non continue

a) $\frac{f(x)}{x} = x\sin\frac{1}{x} \to 0$: $f'(0) = 0$, et pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, sans limite en 0.

b) $F(a+h, b+k) = F(a,b) + f'(a)h + f'(b)k + o(|h|) + o(|k|)$: F est différentiable avec $\mathrm{d}F_{(a,b)}(h,k) = f'(a)h + f'(b)k$. Mais

$$\partial_x F(x,y) = f'(x)$$

n'est pas continue en $(0,0)$: F n'est pas C^1.

c) Le théorème « dérivées partielles continues sur un ouvert $\Rightarrow f$ de classe C^1 » : ici la réciproque est fausse, la différentiabilité ne donne pas la continuité de la différentielle.

Réponse. F différentiable partout mais pas C^1 ($\partial_x F = f'$ discontinue en 0).

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : point fixe et contraction

a) $\mathrm{d}f_{(x,y)}(h,k) = \left(\frac{\cos y}{3}k, -\frac{\sin x}{3}h\right)$; chaque composante est majorée par $\frac{1}{3}\|(h,k)\|_\infty$.

b) Accroissements finis sur le convexe $\mathbb{R}^2$.

c) $\|u_{k+1} - u_k\| \le \frac{1}{3^k}\|u_1 - u_0\|$: la série des $u_{k+1} - u_k$ converge absolument, (u_k) converge vers ℓ, et $f(\ell) = \ell$ par continuité. Un second point fixe ℓ' vérifierait $\|\ell - \ell'\| \le \frac{1}{3}\|\ell - \ell'\|$, donc $\ell = \ell'$. Enfin

$$\|u_k - \ell\|_\infty \le \frac{\|u_0 - \ell\|_\infty}{3^k}$$

Réponse. f est $\frac{1}{3}$-contractante ; $u_k \to \ell$ unique point fixe, $\|u_k - \ell\| \le 3^{-k}\|u_0 - \ell\|$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).