Plaquette 3 – Règle de la chaîne, changements de variables et équations aux dérivées partielles

Calcul différentiel — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Règle de la chaîne. Si $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$:

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad J_{f\circ\Phi} = J_f(\Phi)J_\Phi$$

Coordonnées polaires ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) : $\partial_r g = \cos\theta f_x + \sin\theta f_y$, $\partial_\theta g = -yf_x + xf_y$, et $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$.

Équations élémentaires. Sur un ouvert convexe (ou un produit d'intervalles), $\partial_u g = 0 \Leftrightarrow g(u,v) = \varphi(v)$; $\partial_u\partial_v g = 0 \Leftrightarrow g = \varphi(u) + \psi(v)$.

Correction de l'exercice 1 – Le laplacien en coordonnées polaires

a) $g_r = \cos\theta f_x + \sin\theta f_y$ et $g_\theta = -r\sin\theta f_x + r\cos\theta f_y$.

b) En dérivant encore (Schwarz pour $f_{xy} = f_{yx}$) : $g_{rr} = \cos^2\theta f_{xx} + 2\sin\theta\cos\theta f_{xy} + \sin^2\theta f_{yy}$ et

$$g_{\theta\theta} = r^2\Big(\sin^2\theta f_{xx} - 2\sin\theta\cos\theta f_{xy} + \cos^2\theta f_{yy}\Big) - r\Big(\cos\theta f_x + \sin\theta f_y\Big)$$

c) $g_{rr} + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta} = f_{xx} + f_{yy} - \frac{1}{r}g_r$, d'où la formule.

Réponse. $\Delta f = g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$.

Correction de l'exercice 2 – Fonctions harmoniques radiales du plan

a) $g(r,\theta) = h(r)$ ne dépend pas de θ : le laplacien polaire donne $h'' + \frac{1}{r}h' = 0$.

b) $(rh')' = rh'' + h' = 0$, donc $rh' = a$, $h = a\ln r + b$.

c) $a\ln r$ n'est pas bornée près de 0 : seules les constantes se prolongent. Les fonctions

$$f(x,y) = a\ln\sqrt{x^2+y^2} + b$$

sont les solutions fondamentales du laplacien plan.

Réponse. $h = a\ln r + b$; seules les constantes sont harmoniques radiales sur tout $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 3 – Équation de transport

a) $(x,y) \mapsto (u,v)$ est linéaire bijective ($a \neq 0$), $f = g(x, bx - ay)$: $f_x = g_u + bg_v$, $f_y = -ag_v$, donc

$$af_x + bf_y = ag_u + abg_v - abg_v = ag_u$$

b) $g_u = 0$ sur $\mathbb{R}^2$: g ne dépend que de v.

c) $f = \varphi(2x - y)$ et $f(0,y) = \varphi(-y) = y^2$: $\varphi(s) = s^2$, $f(x,y) = (2x-y)^2$. f est constante le long des droites parallèles à $(a,b) = (1,2)$.

Réponse. $f = \varphi(bx - ay)$; avec la condition, $f = (2x-y)^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 4 – Invariance par rotation

a) $g_\theta = -r\sin\theta f_x + r\cos\theta f_y = xf_y - yf_x$.

b) Pour r fixé, $\theta \mapsto g(r,\theta)$ est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ (fonction 2π-périodique) : g ne dépend que de r, et $f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$ avec φ de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

c) $g_\theta = g$ avec $\theta \in]-\pi,\pi[$: $g = \psi(r)\mathrm{e}^\theta$, soit

$$f(x,y) = \psi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{e}^{\theta(x,y)}$$

où θ est l'argument continu du plan fendu (sur le plan privé de 0 entier, seule $f=0$ convient, car $\mathrm{e}^{\theta+2\pi} \neq \mathrm{e}^\theta$).

Réponse. $f = \varphi(x^2+y^2)$; pour $xf_y - yf_x = f$: $f = \psi(r)\mathrm{e}^\theta$ sur le plan fendu.

Correction de l'exercice 5 – Une équation d'homogénéité

a) $f(x,y) = g\left(x, \frac{y}{x}\right)$, d'où $f_x = g_u - \frac{y}{x^2}g_v$ et $f_y = \frac{1}{x}g_v$. Alors

$$xf_x + yf_y = xg_u - \frac{y}{x}g_v + \frac{y}{x}g_v = ug_u$$

b) À v fixé, $ug_u = g$ donne $g = u\varphi(v)$.

c) $f = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$: $f_x = \varphi - \frac{y}{x}\varphi'$, $f_y = \varphi'$, et $xf_x + yf_y = x\varphi = f$. Ce sont les fonctions homogènes de degré 1 : $f(tx,ty) = tf(x,y)$ (relation d'Euler).

Réponse. $f(x,y) = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$: fonctions homogènes de degré 1.

Correction de l'exercice 6 – Dérivée croisée nulle

a) $\partial_x(\partial_y f) = 0$: $\partial_y f(x,y) = \psi_1(y)$, puis $f(x,y) = \psi(y) + \varphi(x)$ (ψ primitive de ψ_1). Réciproquement ces fonctions conviennent.

b) $\varphi(x) + \psi(0) = x^2$ et $\varphi(0) + \psi(y) = \sin y$, d'où

$$f(x,y) = x^2 + \sin y$$

(en vérifiant $\varphi(0) + \psi(0) = f(0,0) = 0$).

c) Non : sur un ouvert non « convexe dans la direction x », l'argument « $\partial_x h = 0 \Rightarrow h$ ne dépend pas de x » tombe (penser à un ouvert en U où une même horizontale traverse deux composantes).

Réponse. $f = \varphi(x) + \psi(y)$; avec les conditions : $x^2 + \sin y$.

Correction de l'exercice 7 – L'équation des ondes avec conditions initiales

a) Comme pour l'équation des ondes (plaquette 1) avec $c = 1$.

b) $\varphi(x) + \psi(x) = \sin x$ et $\varphi'(x) - \psi'(x) = 0$.

c) $\varphi - \psi$ est constante, et l'on peut prendre $\varphi = \psi = \frac{\sin}{2}$ (la constante se compense) :

$$f(x,y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2} = \sin x\cos y$$

Second cas : $\varphi + \psi = 0$ et $\varphi' - \psi' = \cos$, d'où $\varphi = \frac{\sin}{2}$, $\psi = -\frac{\sin}{2}$ et $f = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2} = \cos x\sin y$.

Réponse. $f = \sin x\cos y$; second cas $f = \cos x\sin y$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Règle de la chaîne pour le déterminant

a) Règle de la chaîne : $(\det\circ M)'(t) = \mathrm{d}(\det)_{M(t)}(M'(t))$.

b) $\mathrm{com}(M)^{\mathsf{T}} = \det(M)M^{-1}$ et $M^{-1}M' = A$: $(\det M)' = \det(M)\mathrm{tr}A$, avec $\det M(0) = 1$, d'où $\det\exp(tA) = \mathrm{e}^{t\mathrm{tr}A}$.

c) $\det M = t^4 - t^2$, de dérivée $4t^3 - 2t$. Et $\mathrm{com}(M)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} t^3 & -1 \\ -t^2 & t \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 3t^2 \end{pmatrix}$:

$$\mathrm{tr}\Big(\mathrm{com}(M)^{\mathsf{T}}M'\Big) = (t^3 - 2t) + 3t^3 = 4t^3 - 2t \ \checkmark$$

Réponse. $(\det M)' = \mathrm{tr}(\mathrm{com}(M)^{\mathsf{T}}M')$; d'où $\det\exp(tA) = \mathrm{e}^{t\mathrm{tr}A}$.

Correction de l'exercice 9 – Dérivée seconde le long d'une courbe

a) $g' = f_x(\gamma)x' + f_y(\gamma)y'$; en redérivant chaque terme (règle de la chaîne pour $f_x\circ\gamma$ et $f_y\circ\gamma$, et Schwarz) on obtient la formule.

b) $g(t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$, donc $g'' = -4\cos 2t$. Avec $H_f = \mathrm{diag}(2,-2)$:
$\gamma'^{\mathsf{T}}H\gamma' = 2\sin^2 t - 2\cos^2 t$ et
$\langle\nabla f, \gamma''\rangle = \langle(2\cos t, -2\sin t), (-\cos t, -\sin t)\rangle = -2\cos^2 t + 2\sin^2 t$; la somme vaut

$$4\sin^2 t - 4\cos^2 t = -4\cos 2t \ \checkmark$$

c) $g''(t) = v^{\mathsf{T}}H_f(a+tv)v$: la hessienne donne la dérivée seconde dans une direction.

Réponse. $g'' = \gamma'^{\mathsf{T}}H_f\gamma' + \langle\nabla f, \gamma''\rangle$, vérifié sur $\cos 2t$.

Correction de l'exercice 10 – Jacobienne de la réciproque des coordonnées polaires

a) $J_\Phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$, de déterminant r.

b) $J_\Psi(\Phi(r,\theta))J_\Phi(r,\theta) = I$, donc

$$J_\Psi = J_\Phi^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

c) $\partial_x r = \cos\theta = \frac{x}{r}$, $\partial_y r = \frac{y}{r}$, $\partial_x\theta = -\frac{\sin\theta}{r} = -\frac{y}{r^2}$, $\partial_y\theta = \frac{x}{r^2}$. Directement, $\partial_x\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ✓.

Réponse. $\det J_\Phi = r$; $J_\Psi = J_\Phi^{-1}$; $\nabla r = \frac{(x,y)}{r}$, $\nabla\theta = \frac{(-y,x)}{r^2}$.

Correction de l'exercice 11 – Le noyau de la chaleur

a) $\partial_t f = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2}\right)f$, $\partial_x f = -\frac{x}{2t}f$, et

$$\partial_x^2 f = -\frac{1}{2t}f + \frac{x^2}{4t^2}f$$

b) Les deux expressions coïncident.

c) Avec $x = 2\sqrt{t}\,u$: $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-u^2}2\sqrt{t}\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{\pi}$, indépendant de t : la « quantité de chaleur » est conservée, tandis que la gaussienne s'étale.

Réponse. $\partial_t f = \partial_x^2 f = (-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2})f$; $\int f\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{\pi}$ pour tout t.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Coordonnées sphériques

a) Colonnes $\partial_r\Phi = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$, $\partial_\varphi\Phi = r(\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi)$, $\partial_\theta\Phi = r\sin\varphi(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$.

b) Ces trois vecteurs sont orthogonaux, de normes 1, r, $r\sin\varphi$, et forment une base directe pour $\varphi \in]0,\pi[$:

$$\det J_\Phi = 1 \cdot r \cdot r\sin\varphi = r^2\sin\varphi$$

c) Le déterminant s'annule pour $r = 0$ (origine) ou $\sin\varphi = 0$ (axe Oz) : là, θ (ou φ) n'est plus déterminé, comme l'argument à l'origine en polaires.

Réponse. $\det J_\Phi = r^2\sin\varphi$, nul à l'origine et sur l'axe Oz.

Correction de l'exercice 13 – Gradient d'une intégrale à bornes variables

a) Avec G primitive de g, $F(x,y) = G(y) - G(x)$: $\nabla F = (-g(x), g(y))$, continu.

b) $\varphi(t) = F(\sin t, t^2)$, et par la règle de la chaîne

$$\varphi'(t) = -g(\sin t)\cos t + g(t^2)\cdot 2t = -\mathrm{e}^{-\sin^2 t}\cos t + 2t\mathrm{e}^{-t^4}$$

c) $\varphi'(0) = -1$ et $\varphi'(\pi) = 1 + 2\pi\mathrm{e}^{-\pi^4}$.

Réponse. $\nabla F = (-g(x), g(y))$; $\varphi'(t) = -\mathrm{e}^{-\sin^2 t}\cos t + 2t\mathrm{e}^{-t^4}$.

Correction de l'exercice 14 – Changement de variables linéaire dans une équation d'ordre deux

a) $f_x = g_u + 2g_v$, $f_y = g_u + g_v$, puis

$$f_{xx} = g_{uu} + 4g_{uv} + 4g_{vv}, \quad f_{xy} = g_{uu} + 3g_{uv} + 2g_{vv}, \quad f_{yy} = g_{uu} + 2g_{uv} + g_{vv}$$

b) $f_{xx} - 3f_{xy} + 2f_{yy} = (1 - 3 + 2)g_{uu} + (4 - 9 + 4)g_{uv} + (4 - 6 + 2)g_{vv} = -g_{uv}$.

c) $g = \varphi(u) + \psi(v)$, soit $f(x,y) = \varphi(x+y) + \psi(2x+y)$ (les directions u et v correspondent aux racines 1 et 2 de $\lambda^2 - 3\lambda + 2$).

Réponse. L'équation devient $g_{uv} = 0$: $f = \varphi(x+y) + \psi(2x+y)$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : fonctions harmoniques

a) $g = r^\alpha\cos(n\theta)$: $g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta} = (\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2)r^{\alpha-2}\cos n\theta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm n$. Et $(x+iy)^n = r^n\mathrm{e}^{in\theta}$, de partie réelle $r^n\cos(n\theta)$.

b) $(r^2h')' = r^2h'' + 2rh' = 0$, donc $h' = \frac{a}{r^2}$ et

$$h(r) = b - \frac{a}{r}$$

(le potentiel newtonien $\frac{1}{r}$).

c) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle\nabla f, \nabla g\rangle$ (dérivées d'un produit). Pour $g = f$: $\Delta(f^2) = 2\|\nabla f\|^2 = 0$ impose $\nabla f = 0$, donc f constante.

Réponse. $r^{\pm n}\cos n\theta$ harmoniques ; radiales dans $\mathbb{R}^3$: $b - \frac{a}{r}$; $\Delta(f^2) = 2\|\nabla f\|^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).