Plaquette 5 – Synthèse : gradient, lignes de niveau et plans tangents

Calcul différentiel — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Gradient. $\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$ en base orthonormée ; dérivée directionnelle $D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle$, maximale pour $v = \dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.

Lignes de niveau. Pour une courbe γ tracée sur $\{f = c\}$: $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$.

Plan tangent à $\{F = 0\}$ en un point régulier a, et au graphe de f en $(a, b, f(a,b))$:

$$\langle \nabla F(a), x - a \rangle = 0, \qquad z = f(a,b) + \partial_x f(a,b)(x-a) + \partial_y f(a,b)(y-b)$$

Correction de l'exercice 1 – Direction de plus forte pente

a) $\nabla f = (-4x, -2y)$, donc $\nabla f(1,2) = (-4, -4)$.

b) Direction $\dfrac{(-1,-1)}{\sqrt{2}}$ (vers le sommet), pente

$$\|\nabla f(1,2)\| = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$$

soit environ 5,66 m par hectomètre.

c) Les directions orthogonales au gradient : $\pm\dfrac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$, tangentes à l'ellipse de niveau $2x^2 + y^2 = 6$.

Réponse. $\nabla f(1,2) = (-4,-4)$; plus forte pente $4\sqrt{2}$ selon $-(1,1)$; niveau selon $\pm(1,-1)$.

Correction de l'exercice 2 – Tangente à une courbe de niveau

a) $\nabla f = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$ s'annule pour $y = x^2$ et $x = y^2$, soit $(0,0)$ ou $(1,1)$. Seul $(0,0)$ est sur C ($f(1,1) = -1$) : c'est le point double.

b) $\nabla f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{27}{4} - \frac{9}{2}, \frac{27}{4} - \frac{9}{2}\right) = \left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$, d'où la tangente $x + y = 3$.

c) Tangente horizontale : $\partial_x f = 0$ et $\partial_y f \neq 0$, soit $y = x^2$; alors $x^3 + x^6 - 3x^3 = 0$, $x^3(x^3 - 2) = 0$. En écartant l'origine :

$$\left(2^{1/3}, 2^{2/3}\right)$$

(où $\partial_y f = 3(2^{4/3} - 2^{1/3}) \neq 0$).

Réponse. Point singulier $(0,0)$; tangente $x + y = 3$; tangente horizontale en $(2^{1/3}, 2^{2/3})$.

Correction de l'exercice 3 – Plan tangent à une sphère et à un ellipsoïde

a) $\nabla F = (2x, 2y, 2z)$; en $(1,2,2)$ le plan est $x + 2y + 2z = 9$ (le rayon est normal).

b) $\nabla F = \left(\frac{x}{2}, 2y, \frac{2z}{9}\right) = \left(1, 2, \frac{2}{3}\right)$: $(x-2) + 2(y-1) + \frac{2}{3}(z-3) = 0$, soit $3x + 6y + 2z = 18$.

c) ∇F colinéaire à $(1,1,1)$: $x = 2\lambda$, $y = \frac{\lambda}{2}$, $z = \frac{9\lambda}{2}$. Dans l'équation :

$$\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{9\lambda^2}{4} = \frac{7\lambda^2}{2} = 3$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d'où $\lambda = \pm\sqrt{\frac{6}{7}}$ et les deux points $\pm\sqrt{\frac{6}{7}}\left(2, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

Réponse. $x + 2y + 2z = 9$; $3x + 6y + 2z = 18$; points $\pm\sqrt{6/7}\,(2, \frac{1}{2}, \frac{9}{2})$.

Correction de l'exercice 4 – Plan tangent à un graphe et approximation

a) $\nabla f = \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$: $z = 5 + \frac{3}{5}(x - 3) + \frac{4}{5}(y - 4)$.

b) Avec $h = 0{,}02$, $k = -0{,}03$: $z \approx 5 + 0{,}012 - 0{,}024 = 4{,}988$.

c) $3{,}02^2 + 3{,}97^2 = 9{,}1204 + 15{,}7609 = 24{,}8813$ et

$$\sqrt{24{,}8813} \approx 4{,}98812$$

l'erreur ($\approx 1{,}2 \cdot 10^{-4}$) est de l'ordre de $\|(h, k)\|^2 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ divisé par 2×5 : c'est un terme du second ordre.

Réponse. Plan $z = 5 + \frac{3}{5}(x - 3) + \frac{4}{5}(y - 4)$; approximation 4,988, valeur exacte $\approx 4{,}98812$.

Correction de l'exercice 5 – Courbe intersection de deux surfaces

a) $1 + 1 + 4 = 6$ et $1 + 1 = 2$.

b) $\nabla(x^2 + y^2 + z^2)(A) = (2, 2, 4)$ et $\nabla(x^2 + y^2)(A) = (2, 2, 0)$.

c) La tangente est orthogonale aux deux normales, dirigée par leur produit vectoriel :

$$(1, 1, 2) \wedge (1, 1, 0) = (-2, 2, 0)$$

soit $(-1, 1, 0)$. Cohérent : Γ est le cercle horizontal $z = 2$, $x^2 + y^2 = 2$.

Réponse. Normales $(2, 2, 4)$ et $(2, 2, 0)$; tangente dirigée par $(-1, 1, 0)$.

Correction de l'exercice 6 – Gradient en coordonnées polaires

a) (u_r, u_θ) est orthonormée, et $\langle \nabla f, u_r \rangle = g_r$, $\langle \nabla f, u_\theta \rangle = \frac{1}{r}(-r\sin\theta f_x + r\cos\theta f_y) = \frac{1}{r} g_\theta$.

b) $g = \theta$: $g_r = 0$, $g_\theta = 1$, donc

$$\nabla\theta = \frac{1}{r} u_\theta = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2}$$

c) $\nabla\theta$ est tangent aux cercles : les lignes de niveau (demi-droites issues de 0) leur sont orthogonales.

Réponse. $\nabla f = g_r u_r + \frac{1}{r} g_\theta u_\theta$; $\nabla\theta = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2}$.

Correction de l'exercice 7 – Fonction dont le gradient est donné

a) Condition de Schwarz : $\partial_y(2xy + 1) = 2x = \partial_x(x^2 + 3y^2)$ ✓. On intègre : $f = x^2 y + x + \varphi(y)$, puis $x^2 + \varphi'(y) = x^2 + 3y^2$, d'où

$$f(x, y) = x^2 y + x + y^3 + C$$

b) $\partial_y(y) = 1 \neq 2 = \partial_x(2x)$: impossible.

c) Non : ce serait $\nabla\theta$ (exercice précédent), et l'intégrale $\int_0^{2\pi} \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$ sur le cercle unité vaudrait $f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = 0$, alors qu'elle vaut 2π. La condition de Schwarz ne suffit pas sur un ouvert « troué ».

Réponse. a) $f = x^2 y + x + y^3 + C$; b) non ; c) non (circulation 2π sur le cercle).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Dérivée de la distance à un point le long d'une trajectoire

a) $\nabla\|x-A\| = \frac{x-A}{\|x-A\|}$, donc $d'(t) = \frac{\langle \gamma(t)-A, \gamma'(t)\rangle}{d(t)}$.

b) $\langle (t, t^2-1), (1, 2t)\rangle = t + 2t^3 - 2t = t(2t^2-1)$: $t = 0$ ou $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ce sont les points où $\gamma(t) - A$ est normal à la parabole.

c) $d(0) = 1$ et $d\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Comme $d(t) \to +\infty$ à l'infini, le minimum est

$$d_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Réponse. $d'(t) = \frac{t(2t^2-1)}{d(t)}$; distance minimale $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 9 – Lignes de niveau orthogonales

a) $\nabla u = (2x, -2y)$ et $\nabla v = (2y, 2x)$: produit scalaire $4xy - 4xy = 0$, normes égales à $2\sqrt{x^2+y^2}$.

b) Les tangentes aux deux courbes en un point d'intersection sont orthogonales aux gradients, eux-mêmes orthogonaux et non nuls hors de 0 : les courbes se coupent à angle droit.

c) $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ ✓, et

$$\Delta u = 2 - 2 = 0, \qquad \Delta v = 0 + 0 = 0$$

(ce sont les conditions de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$).

Réponse. Gradients orthogonaux de même norme : les deux familles d'hyperboles sont orthogonales ; u, v harmoniques.

Correction de l'exercice 10 – Différentiabilité et dérivées directionnelles

a) $\frac{f(ta,tb)}{t} = \frac{a^2 b}{t^2 a^4 + b^2}$: si $b \neq 0$, la limite est $\frac{a^2}{b}$; si $b = 0$, $f(ta, 0) = 0$ et la limite est 0.

b) $D_v f(0,0) = \frac{a^2}{b}$ (pour $b \neq 0$) n'est pas linéaire en (a, b) : f n'est pas différentiable en 0.

c) $f(x, x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers $f(0,0) = 0$.

$$\lim_{x \to 0} f(x, x^2) = \frac{1}{2} \neq 0$$

L'existence de toutes les dérivées directionnelles n'entraîne même pas la continuité.

Réponse. $D_v f(0) = \frac{a^2}{b}$ ($b \neq 0$), 0 sinon : non linéaire ; f discontinue en 0.

Correction de l'exercice 11 – Une équation d'Euler en trois variables

a) On dérive $t \mapsto f(tx) = t^\alpha f(x)$ en $t = 1$: $\langle \nabla f(x), x\rangle = \alpha f(x)$.

b) f est homogène de degré $2 - 1 = 1$. Avec $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$: $\partial_x f = \frac{y}{r} - \frac{x^2 y}{r^3}$, $\partial_y f = \frac{x}{r} - \frac{xy^2}{r^3}$, $\partial_z f = -\frac{xyz}{r^3}$, et

$$x\partial_x f + y\partial_y f + z\partial_z f = \frac{2xy}{r} - \frac{xy(x^2+y^2+z^2)}{r^3} = \frac{xy}{r} = f$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En dérivant $f(tx, ty, tz) = t^\alpha f(x, y, z)$ par rapport à x : $t\,\partial_x f(tx) = t^\alpha \partial_x f(x)$.

Réponse. $\langle \nabla f(x), x\rangle = \alpha f(x)$; vérifié avec $\alpha = 1$; $\partial_x f$ homogène de degré $\alpha - 1$.

Correction de l'exercice 12 – Lignes de plus grande pente

a) $x' = -2x$, $y' = -4y$: $x = \mathrm{e}^{-2t}$, $y = \mathrm{e}^{-4t}$.

b) $y = \left(\mathrm{e}^{-2t}\right)^2 = x^2$.

c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma), \gamma'\rangle = -\|\nabla f(\gamma(t))\|^2 \le 0$, et explicitement

$$f(\gamma(t)) = \mathrm{e}^{-4t} + 2\mathrm{e}^{-8t}$$

est décroissante, tendant vers le minimum 0.

Réponse. $\gamma(t) = (\mathrm{e}^{-2t}, \mathrm{e}^{-4t})$, sur la parabole $y = x^2$; $f \circ \gamma$ décroît.

Correction de l'exercice 13 – Plan tangent au cône et droites du cône

a) $\nabla F = (2x, 2y, -2z)$ s'annule seulement en 0 (le sommet). En $(3, 4, 5)$: $3x + 4y - 5z = 0$.

b) $3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 - 5 \cdot 5 = 0$ ✓, et par linéarité tout multiple de $(3, 4, 5)$ convient.

c) Le plan tangent en a est $\langle \nabla F(a), x - a\rangle = 0$, et F homogène de degré 2 donne (Euler)

$$\langle \nabla F(a), a\rangle = 2F(a) = 0$$

donc l'équation se réduit à $\langle \nabla F(a), x\rangle = 0$: le plan passe par 0 et contient la génératrice.

Réponse. Seul point singulier : le sommet ; plan $3x + 4y - 5z = 0$; tout plan tangent passe par 0.

Correction de l'exercice 14 – Intégrale curviligne d'un gradient

a) L'intégrande est $(f \circ \gamma)'(t)$ (règle de la chaîne).

b) $f(2, 1) - f(1, 0) = 2\mathrm{e} + 1 - 1 = 2\mathrm{e}$.

c) $\nabla f = (\mathrm{e}^y, x\mathrm{e}^y + 2y)$, $\gamma' = (1, 1)$: l'intégrande vaut $\mathrm{e}^t + (1 + t)\mathrm{e}^t + 2t = (2 + t)\mathrm{e}^t + 2t$. Une primitive de $(2 + t)\mathrm{e}^t$ est $(1 + t)\mathrm{e}^t$, d'où

$$\Big[(1 + t)\mathrm{e}^t + t^2\Big]_0^1 = 2\mathrm{e} + 1 - 1 = 2\mathrm{e}\ \checkmark$$

Réponse. L'intégrale vaut 2e, quel que soit le chemin.

Correction de l'exercice 15 – Problème : la loi des gaz et les dérivées partielles

a) $P = \frac{nRT}{V}$: $\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}$; $V = \frac{nRT}{P}$: $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{nR}{P}$; $T = \frac{PV}{nR}$: $\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{nR}$.

b) Produit : $-\frac{nRT}{V^2} \cdot \frac{nR}{P} \cdot \frac{V}{nR} = -\frac{nRT}{PV} = -1$.

c) Si $z = \varphi(x, y)$, alors $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ et la règle de la chaîne donne $\partial_x F + \partial_z F\,\partial_x \varphi = 0$, donc $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{F_x}{F_z}$. De même :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = -1$$

Réponse. Le produit des trois dérivées partielles vaut -1 (relation cyclique).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).