Plaquette 2 – Différentiabilité, classe C1 et contre-exemples

Calcul différentiel — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour étudier une fonction de plusieurs variables en un point délicat (souvent l'origine), on suit une hiérarchie : **continuité** (majoration en coordonnées polaires, ou suite de points qui contredit), **dérivées partielles** (limites de taux en une variable), **dérivées directionnelles**, puis **différentiabilité** : on forme le candidat $L(h) = \sum \partial_i f(a) h_i$ et l'on montre (ou réfute) que $f(a+h) - f(a) - L(h) = o(\|h\|)$. La classe C^1 (dérivées partielles continues) est le critère pratique qui garantit la différentiabilité. Les contre-exemples montrent que chaque implication est stricte.

Exercice 1 – Dérivées partielles sans continuité

Soit $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

a) Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et les calculer.

b) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

c) f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 2 – Dérivées directionnelles non linéaires

Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$.

a) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

b) Calculer la dérivée de f en $(0,0)$ selon tout vecteur $v = (a,b)$.

c) En déduire que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3 – Différentiable sans être de classe C1

Soit $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f(0,0) = 0$.

a) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ de différentielle nulle.

b) Calculer $\partial_x f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

c) Montrer que $\partial_x f$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 4 – Les dérivées croisées diffèrent

Soit $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$.

a) Calculer $\partial_x f(0,y)$ et $\partial_y f(x,0)$.

b) En déduire $\partial_y \partial_x f(0,0)$ et $\partial_x \partial_y f(0,0)$.

c) Pourquoi le théorème de Schwarz ne s'applique-t-il pas ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Différentiabilité selon un exposant

Pour $\alpha > 0$, soit $f(x,y) = |xy|^{\alpha}$.

a) Calculer les dérivées partielles de f en $(0,0)$.

b) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ si $\alpha > \frac{1}{2}$.

c) Montrer qu'elle ne l'est pas si $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 6 – Différentiabilité des normes

a) Montrer que la norme euclidienne $N(x) = \|x\|_2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et calculer son gradient.

b) Montrer que N n'est pas différentiable en 0.

c) Montrer que $N_\infty(x,y) = \max(|x|,|y|)$ n'est pas différentiable en $(1,1)$.

Exercice 7 – Gradient nul sur un ouvert

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $\nabla f = 0$ sur U.

a) Si U est convexe, montrer que f est constante (étudier $g(t) = f(a + t(b-a))$).

b) Montrer le résultat si U est connexe par arcs (lignes brisées).

c) Donner un contre-exemple si U n'est pas connexe.

Exercice 8 – Fonctions radiales

Soit $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $f(x) = g(\|x\|_2)$ sur $\mathbb{R}^n$.

a) Calculer $\nabla f(x)$ pour $x \neq 0$.

b) Si $g'(0) = 0$, montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ avec $\nabla f(0) = 0$.

c) Que se passe-t-il pour $g(r) = r$? pour $g(r) = r^2$?

Exercice 9 – Une fonction homogène de degré un

Soit $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$, $f(0,0) = 0$.

a) Montrer que f est continue en $(0,0)$ et calculer ses dérivées partielles en $(0,0)$.

b) Calculer $f(h,k) - (h-k)$ et montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

c) Expliquer pourquoi une fonction homogène de degré 1, différentiable en 0, est forcément linéaire.

Exercice 10 – Approximation au premier ordre

Soit $f(x,y) = x^3 y^2$.

a) Calculer la différentielle de f en $(1,1)$.

b) En déduire une valeur approchée de $1{,}02^3 \times 0{,}97^2$.

c) Comparer avec la valeur exacte et estimer l'erreur à l'aide des dérivées secondes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Inégalité des accroissements finis

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $\|\nabla f\|_2 \leq M$.

a) Montrer que $|f(b) - f(a)| \leq M\|b - a\|_2$.

b) Application : montrer que $f(x, y) = \sin x \cos y$ est 1-lipschitzienne pour la norme euclidienne.

c) La convexité est-elle nécessaire ? (Penser à un ouvert en forme de fente.)

Exercice 12 – Un sinus cardinal à deux variables

Soit $f(x, y) = \dfrac{\sin(xy)}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0, y) = y$.

a) Montrer que $f(x, y) = y\,S(xy)$ avec $S(u) = \sum_{k \geq 0} \dfrac{(-1)^k u^{2k}}{(2k+1)!}$.

b) En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

c) Calculer $\nabla f(0, y)$.

Exercice 13 – Un produit par un logarithme

Soit $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$, $f(0, 0) = 0$.

a) Montrer que f est différentiable en $(0, 0)$ de différentielle nulle.

b) Calculer $\partial_x f$ hors de l'origine et montrer qu'elle tend vers 0 en $(0, 0)$.

c) En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 14 – Direction de plus grande pente

Soit $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ et $a = (1, 1)$.

a) Calculer $\nabla f(a)$ et la dérivée de f en a selon un vecteur unitaire $u = (\cos\theta, \sin\theta)$.

b) Déterminer la direction de plus grande croissance et la valeur maximale de $D_u f(a)$.

c) Dans quelles directions la dérivée est-elle nulle ? Interpréter avec la ligne de niveau.

Exercice 15 – Synthèse : dérivées directionnelles sans continuité

Soit $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$, $f(0, 0) = 0$.

a) Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue en 0.

b) Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$ (étudier la parabole $x = y^2$).

c) Calculer $D_v f(0, 0)$ pour tout $v = (a, b)$.

d) Conclure sur la hiérarchie des notions.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).