Plaquette 1 – Différentielle, gradient, règle de la chaîne et difféomorphismes

Calcul différentiel — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On calcule une **différentielle** comme application linéaire, on identifie le **gradient** et la **jacobienne**, on compose par la **règle de la chaîne**, et on utilise le théorème d'inversion locale.

Exercice 1 – Différentielle d'une forme quadratique

Soit $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$. Calculer ∇f et $\mathrm{d}f_{(1,2)}(h,k)$.

Exercice 2 – Jacobienne

Soit $f(r,\theta) = (r\cos\theta,\, r\sin\theta)$ (coordonnées polaires). Calculer J_f et son déterminant.

Exercice 3 – Règle de la chaîne

Soit $f(x,y) = x^2 y$ et $\gamma(t) = (\cos t,\, \sin t)$. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t))$ de deux façons.

Exercice 4 – Dérivée directionnelle

Soit $f(x,y,z) = xyz$. Calculer la dérivée de f en $(1,1,1)$ dans la direction $v = \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$.

Exercice 5 – Ligne de niveau et gradient

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$. Montrer que ∇f est orthogonal aux lignes de niveau.

Exercice 6 – Théorème de Schwarz

Soit $f(x,y) = x^3 y - x y^3$. Vérifier $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$ et calculer la hessienne en $(1,1)$.

Exercice 7 – Différentiabilité et dérivées partielles

Soit $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. f est-elle différentiable en l'origine ?

Exercice 8 – Inversion locale

Soit $f(x,y) = (\mathrm{e}^x \cos y,\, \mathrm{e}^x \sin y)$. Montrer que f est un difféomorphisme local partout, mais n'est pas injective.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Fonctions homogènes

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, homogène de degré p : $f(tx, ty) = t^p f(x, y)$ pour $t > 0$. Démontrer la relation d'Euler.

Exercice 10 – Équation aux dérivées partielles

Résoudre $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $\{x > 0\}$ à l'aide des coordonnées polaires.

Exercice 11 – Hessienne et extremum

Étudier les extremums de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ à l'aide de la hessienne.

Exercice 12 – Différentielle du déterminant

Soit $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

a) En développant $\det(I + tH)$, montrer que $\mathrm{d}(\det)_I(H) = \mathrm{tr}H$.

b) Pour M inversible, écrire $\det(M + H) = \det M \det(I + M^{-1}H)$ et en déduire $\mathrm{d}(\det)_M(H) = \det(M)\mathrm{tr}(M^{-1}H)$.

c) En déduire $\mathrm{d}(\det)_M(H) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{com}(M)^{\mathsf{T}}H\right)$ pour M inversible, et justifier l'extension à toute M.

Exercice 13 – Différentielle de l'inversion

Soit $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^{-1}$, et une norme d'algèbre.

a) Pour $\|H\|$ petit, montrer que $(M + H)^{-1} = M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + O(\|H\|^2)$ (série de Neumann).

b) En déduire $\mathrm{d}\varphi_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}$.

c) Retrouver le cas $n = 1$, et calculer $\mathrm{d}\varphi_I$.

Exercice 14 – L'équation des ondes

Soit $c > 0$ et f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

a) Avec $u = x + ct$, $v = x - ct$ et $f(x, t) = g(u, v)$, exprimer $\partial_x f$, $\partial_t f$, puis $\partial_x^2 f$ et $\partial_t^2 f$ en fonction des dérivées de g.

b) En déduire $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$.

c) En déduire que $f(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$ avec φ, ψ de classe C^2.

Exercice 15 – Synthèse : différentielle d'une application matricielle

Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^2$. Calculer $\mathrm{d}f_M(H)$ et en déduire $\mathrm{d}f_I$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).