Plaquette 4 – Différentielles dans les espaces vectoriels normés et accroissements finis

Calcul différentiel — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour différentier une application entre espaces de dimension finie (matrices, polynômes, produits), on **développe** $f(a+h)$, on isole la partie **linéaire en** h (candidate $\mathrm{d}f_a(h)$) et l'on montre que le reste est un $o(\|h\|)$, souvent en le majorant par $C\|h\|^2$ grâce à une **norme sous-multiplicative**. Les applications linéaires sont leur propre différentielle, les bilinéaires donnent $\mathrm{d}B_{(a,b)}(h,k) = B(a,k) + B(h,b)$, et la règle de la chaîne fait le reste. L'**inégalité des accroissements finis** $\|f(b)-f(a)\| \leq \sup_{[a,b]} \|\mathrm{d}f\| \, \|b-a\|$ (sur un convexe) transforme une borne sur la différentielle en caractère lipschitzien.

Exercice 1 – Différentielle de M ↦ M³

Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $f(M) = M^3$.

a) Développer $(A+H)^3$ et en déduire $\mathrm{d}f_A(H)$.

b) Justifier que le reste est un $o(\|H\|)$.

c) Généraliser à $M \mapsto M^p$.

Exercice 2 – Différentielle de l'application trace-produit

Soit $f(M) = \mathrm{tr}(M^{\mathsf{T}}M)$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

a) Reconnaître f et calculer $\mathrm{d}f_A(H)$.

b) En déduire le gradient de f pour le produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}B)$.

c) Calculer de même le gradient de $g(M) = \mathrm{tr}(M^2)$.

Exercice 3 – Gradient du logarithme du déterminant

Soit $U = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : \det M > 0\}$ et $f(M) = \ln \det M$.

a) Justifier que U est ouvert et que f est différentiable.

b) Montrer que $\mathrm{d}f_A(H) = \mathrm{tr}(A^{-1}H)$.

c) En déduire $\nabla f(A)$ pour le produit scalaire de Frobenius.

Exercice 4 – Différentiabilité de la norme euclidienne

Soit E euclidien et $N(x) = \|x\|$.

a) Montrer que N est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ avec $\mathrm{d}N_a(h) = \dfrac{\langle a, h\rangle}{\|a\|}$.

b) Montrer que N n'est pas différentiable en 0.

c) La norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^2$ est-elle différentiable en $(1,0)$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Application bilinéaire et produit vectoriel

Soit $B : E \times F \to G$ bilinéaire entre espaces de dimension finie.

a) Montrer que B est différentiable avec $\mathrm{d}B_{(a,b)}(h,k) = B(a,k) + B(h,b)$.

b) Pour $u, v : I \to \mathbb{R}^3$ dérivables, en déduire $(u \wedge v)' = u' \wedge v + u \wedge v'$.

c) Si $u'' = -\omega^2 u$ (avec ω réel), montrer que $u \wedge u'$ est constant.

Exercice 6 – Application multilinéaire : le déterminant en colonnes

Soit $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \det_B(x_1, \dots, x_n)$ sur $(\mathbb{R}^n)^n$.

a) Montrer que $\mathrm{d}\varphi_{(x_1,\dots,x_n)}(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \det(x_1, \dots, h_i, \dots, x_n)$.

b) En déduire, pour des $x_i(t)$ dérivables, la dérivée de $t \mapsto \det(x_1(t), \dots, x_n(t))$.

c) Calculer la dérivée de $t \mapsto \det \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ par cette formule.

Exercice 7 – Différentielle de l'exponentielle en zéro

Soit $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative.

a) Montrer que $\|\exp(H) - I_n - H\| \leq \|H\|^2 \mathrm{e}^{\|H\|}$.

b) En déduire que exp est différentiable en 0 avec $\mathrm{d}\exp_0 = \mathrm{id}$.

c) Montrer que si $AH = HA$, alors $\exp(A+H) - \exp(A) = \exp(A)(\exp(H) - I_n)$; que donne cette relation pour la dérivée directionnelle en A dans une direction H commutant avec A ?

Exercice 8 – Inégalité des accroissements finis : un contre-exemple

a) Montrer que pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, l'égalité des accroissements finis $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ peut être fausse (essayer $f(t) = (\cos t, \sin t)$ sur $[0, 2\pi]$).

b) Rappeler l'inégalité correcte et la vérifier sur cet exemple.

c) Pour $f(t) = (\cos t, \sin t)$ sur $[0, \pi]$, comparer $\|f(\pi) - f(0)\|$ et $\pi \sup \|f'\|$.

Exercice 9 – Fonction lipschitzienne par la différentielle

Soit $f(x,y) = \left(\sin(x+y), \dfrac{\cos(x-y)}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}^2$ euclidien.

a) Calculer $J_f(x,y)$.

b) Majorer la norme d'opérateur de $\mathrm{d}f_{(x,y)}$ (on pourra majorer par la norme de Frobenius).

c) En déduire que f est k-lipschitzienne et donner une valeur de k.

Exercice 10 – Différentielle nulle sur un connexe

a) Soit U un ouvert convexe et $f : U \to F$ différentiable avec $\mathrm{d}f = 0$. Montrer que f est constante.

b) Étendre le résultat à un ouvert connexe par arcs (on admettra qu'on peut relier deux points par une ligne brisée dans U).

c) Donner un exemple sur un ouvert non connexe où $\mathrm{d}f = 0$ sans que f soit constante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Vecteurs tangents au groupe orthogonal

Soit $\Phi(M) = M^{\mathsf{T}}M$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

a) Calculer $\mathrm{d}\Phi_A(H)$.

b) Si $t \mapsto M(t)$ est une courbe dérivable de matrices orthogonales avec $M(0) = I_n$, montrer que $M'(0)$ est antisymétrique.

c) Réciproquement, montrer que pour A antisymétrique, $t \mapsto \exp(tA)$ est une courbe de matrices orthogonales de vecteur vitesse A en 0.

Exercice 12 – Inégalité des accroissements finis pour l'inverse

Soit $f(M) = M^{-1}$ sur $GL_n(\mathbb{R})$, norme sous-multiplicative.

a) Rappeler $\mathrm{d}f_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}$ et majorer $\|\mathrm{d}f_A\|$.

b) Soient A, B telles que le segment $[A, B]$ soit dans $GL_n(\mathbb{R})$ avec $\|M^{-1}\| \leq c$ sur ce segment. Montrer que $\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq c^2\|B - A\|$.

c) Retrouver ce résultat directement avec $B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1}$.

Exercice 13 – Différentielle d'une application polynomiale

Soit $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{2n}[X]$, $\Phi(P) = P^2 + P'$.

a) Montrer que Φ est différentiable et calculer $\mathrm{d}\Phi_P(H)$.

b) Déterminer le noyau de $\mathrm{d}\Phi_0$ et de $\mathrm{d}\Phi_1$ (avec 1 le polynôme constant).

c) Pour $n = 1$, écrire la matrice de $\mathrm{d}\Phi_X$ dans les bases canoniques.

Exercice 14 – Une fonction différentiable de différentielle non continue

Soit $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, $f(0) = 0$, et $F(x, y) = f(x) + f(y)$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

b) En déduire que F est différentiable en tout point mais n'est pas de classe C^1.

c) Quel théorème aurait permis de conclure à la différentiabilité si les dérivées partielles avaient été continues ?

Exercice 15 – Synthèse : point fixe et contraction

Soit $f(x, y) = \left(\frac{\sin y}{3} + 1, \frac{\cos x}{3}\right)$ sur $\mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

a) Calculer $\mathrm{d}f_{(x,y)}$ et montrer que sa norme d'opérateur (subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$) est au plus $\frac{1}{3}$.

b) En déduire que f est $\frac{1}{3}$-lipschitzienne.

c) Montrer que la suite $u_{k+1} = f(u_k)$ converge vers l'unique point fixe de f, et estimer $\|u_k - \ell\|_\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).