Plaquette 3 – Règle de la chaîne, changements de variables et équations aux dérivées partielles

Calcul différentiel — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour résoudre une **équation aux dérivées partielles** simple, on choisit un **changement de variables** $(x, y) = \Phi(u, v)$ (bijection C^1 à réciproque C^1) adapté à la géométrie : coordonnées polaires pour les rotations et les fonctions radiales, variables $u = x + ct$, $v = x - ct$ pour les ondes, $v = \frac{y}{x}$ pour l'homogénéité, combinaisons linéaires pour le transport. On pose $f = g \circ \Phi^{-1}$, on exprime les dérivées de g par la **règle de la chaîne**, l'équation devient « $\partial_u g = 0$ » ou une équation différentielle, et l'on revient aux variables initiales en précisant le domaine.

Exercice 1 – Le laplacien en coordonnées polaires

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

a) Exprimer g_r et g_θ en fonction de f_x, f_y.

b) Calculer g_{rr} et $g_{\theta\theta}$.

c) En déduire $\Delta f = g_{rr} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta}$.

Exercice 2 – Fonctions harmoniques radiales du plan

On cherche les f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ de la forme $f(x, y) = h\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ avec $\Delta f = 0$.

a) Montrer que $h'' + \frac{1}{r} h' = 0$.

b) En déduire $h(r) = a \ln r + b$.

c) Lesquelles se prolongent en une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 – Équation de transport

Soient $a \neq 0$, b réels. On cherche f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $a\partial_x f + b\partial_y f = 0$.

a) Avec $u = x$, $v = bx - ay$ et $f(x, y) = g(u, v)$, montrer que $a\,\partial_u g = 0$.

b) En déduire $f(x, y) = \varphi(bx - ay)$ avec φ de classe C^1.

c) Résoudre avec $a = 1$, $b = 2$ et la condition $f(0, y) = y^2$.

Exercice 4 – Invariance par rotation

On cherche f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ telle que $x\partial_y f - y\partial_x f = 0$.

a) En coordonnées polaires, montrer que l'équation s'écrit $\partial_\theta g = 0$.

b) En déduire $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$, en prenant garde au domaine (raisonner sur un cercle complet).

c) Résoudre $x\partial_y f - y\partial_x f = f$ sur le plan privé de la demi-droite $\{y = 0, x \leq 0\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Une équation d'homogénéité

On cherche f de classe C^1 sur $U = \{x > 0\}$ telle que $x\partial_x f + y\partial_y f = f$.

a) Avec $u = x$, $v = \frac{y}{x}$ et $f(x,y) = g(u,v)$, montrer que $u\,\partial_u g = g$.

b) En déduire $f(x,y) = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

c) Vérifier directement, et interpréter (homogénéité de degré 1).

Exercice 6 – Dérivée croisée nulle

a) Déterminer les f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

b) Déterminer celles qui vérifient de plus $f(x,0) = x^2$ et $f(0,y) = \sin y$.

c) Le résultat a) reste-t-il vrai sur un ouvert quelconque ?

Exercice 7 – L'équation des ondes avec conditions initiales

On cherche f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ avec $\partial_y^2 f = \partial_x^2 f$, $f(x,0) = \sin x$, $\partial_y f(x,0) = 0$.

a) Rappeler que $f(x,y) = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$ (variables $u = x+y$, $v = x-y$).

b) Traduire les conditions sur φ et ψ.

c) En déduire f, puis traiter $f(x,0) = 0$, $\partial_y f(x,0) = \cos x$.

Exercice 8 – Règle de la chaîne pour le déterminant

On rappelle $\mathrm{d}(\det)_M(H) = \operatorname{tr}\left(\operatorname{com}(M)^{\mathsf{T}} H\right)$.

a) Pour $M : I \to M_n(\mathbb{R})$ dérivable, en déduire $(\det M)'(t) = \operatorname{tr}\left(\operatorname{com}(M(t))^{\mathsf{T}} M'(t)\right)$.

b) Application : $M(t) = \exp(tA)$; retrouver $\det\exp(tA) = \mathrm{e}^{t\operatorname{tr}A}$.

c) Application : $M(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ t^2 & t^3 \end{pmatrix}$; vérifier la formule.

Exercice 9 – Dérivée seconde le long d'une courbe

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, γ de classe C^2 et $g = f \circ \gamma$.

a) Montrer que $g'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ et $g''(t) = \gamma'(t)^{\mathsf{T}} H_f(\gamma(t))\gamma'(t) + \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma''(t) \rangle$.

b) Vérifier sur $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

c) Le long d'une droite ($\gamma'' = 0$), que retrouve-t-on ?

Exercice 10 – Jacobienne de la réciproque des coordonnées polaires

Soit $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ sur $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ et $\Psi = \Phi^{-1}$.

a) Calculer J_Φ et $\det J_\Phi$.

b) En dérivant $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$, exprimer $J_\Psi(x,y)$ sans calculer explicitement Ψ.

c) En déduire $\partial_x r$, $\partial_y r$, $\partial_x \theta$, $\partial_y \theta$, et vérifier avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Le noyau de la chaleur

Soit $f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/(4t)}$ pour $t > 0$.

a) Calculer $\partial_t f$, $\partial_x f$ et $\partial_x^2 f$.

b) Vérifier que $\partial_t f = \partial_x^2 f$.

c) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,dx$ ne dépend pas de t et la calculer.

Exercice 12 – Coordonnées sphériques

Soit $\Phi(r,\varphi,\theta) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$.

a) Calculer la jacobienne de Φ.

b) Montrer que $\det J_\Phi = r^2\sin\varphi$.

c) Où Φ n'est-elle pas un difféomorphisme local ? Interpréter.

Exercice 13 – Gradient d'une intégrale à bornes variables

Soit g continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x,y) = \int_x^y g(t)\,dt$.

a) Montrer que F est de classe C^1 et calculer ∇F.

b) En déduire la dérivée de $\varphi(t) = \int_{\sin t}^{t^2} e^{-s^2}\,ds$.

c) Calculer $\varphi'(0)$ et $\varphi'(\pi)$.

Exercice 14 – Changement de variables linéaire dans une équation d'ordre deux

On cherche f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f_{xx} - 3f_{xy} + 2f_{yy} = 0$.

a) Avec $u = x + y$, $v = 2x + y$ et $f(x,y) = g(u,v)$, exprimer f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}.

b) Montrer que l'équation devient $g_{uv} = 0$ (au signe près).

c) En déduire les solutions.

Exercice 15 – Synthèse : fonctions harmoniques

On appelle harmonique une fonction C^2 de laplacien nul.

a) Avec le laplacien polaire, déterminer les fonctions harmoniques de la forme $r^\alpha\cos(n\theta)$ ($n \in \mathbb{N}^*$), et vérifier que $\mathrm{Re}(x+iy)^n$ est harmonique.

b) Dans $\mathbb{R}^3$, admettant que pour $f(x) = h(\|x\|)$ on a $\Delta f = h'' + \frac{2}{r}h'$, déterminer les fonctions harmoniques radiales sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

c) Montrer que si f et g sont harmoniques, $\Delta(fg) = 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle$, et en déduire que f^2 n'est harmonique que si f est constante (sur un ouvert connexe).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).