Plaquette 5 – Synthèse : gradient, lignes de niveau et plans tangents

Calcul différentiel — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Le **gradient** est le vecteur qui représente la différentielle via le produit scalaire : $\mathrm{d}f_a(h) = \langle \nabla f(a), h\rangle$. Il indique la **direction de plus forte pente** (Cauchy-Schwarz) et il est **orthogonal aux lignes de niveau** : si γ est une courbe tracée sur $\{f = c\}$, alors $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = 0$. Pour une surface $\{F = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$ en un point **régulier** ($\nabla F(a) \neq 0$), le plan tangent est $\langle \nabla F(a), x - a\rangle = 0$; pour un graphe $z = f(x, y)$, c'est $z = f(a) + \mathrm{d}f_a(x - a, y - b)$. Les problèmes de synthèse mêlent ces outils à la règle de la chaîne.

Exercice 1 – Direction de plus forte pente

Une montagne a pour altitude $f(x, y) = 1000 - 2x^2 - y^2$ (en mètres, x, y en hectomètres).

a) Calculer $\nabla f(1, 2)$.

b) Dans quelle direction un randonneur en $(1, 2)$ monte-t-il le plus vite ? Avec quelle pente ?

c) Dans quelles directions reste-t-il à altitude constante (au premier ordre) ?

Exercice 2 – Tangente à une courbe de niveau

Soit la courbe $C : x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (folium de Descartes).

a) Déterminer les points de C où $\nabla f = 0$, avec $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

b) Écrire l'équation de la tangente à C en $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

c) Déterminer les points de C à tangente horizontale.

Exercice 3 – Plan tangent à une sphère et à un ellipsoïde

a) Déterminer le plan tangent à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ au point $(1, 2, 2)$.

b) Déterminer le plan tangent à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ en $(2, 1, 3)$.

c) En quels points de l'ellipsoïde le plan tangent est-il parallèle au plan $x + y + z = 0$?

Exercice 4 – Plan tangent à un graphe et approximation

Soit $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et le point $(3, 4)$.

a) Donner l'équation du plan tangent au graphe de f en $(3, 4, 5)$.

b) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{3{,}02^2 + 3{,}97^2}$.

c) Comparer à la valeur exacte et commenter l'ordre de grandeur de l'erreur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Courbe intersection de deux surfaces

On considère la courbe Γ intersection de la sphère $x^2+y^2+z^2=6$ et du cylindre $x^2+y^2=2$.

a) Vérifier que $A=(1,1,2)$ est sur les deux surfaces.

b) Donner les vecteurs normaux aux deux surfaces en A.

c) En déduire un vecteur directeur de la tangente à Γ en A.

Exercice 6 – Gradient en coordonnées polaires

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ et $g(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On note $u_r=(\cos\theta,\sin\theta)$ et $u_\theta=(-\sin\theta,\cos\theta)$.

a) Montrer que $\nabla f = g_r u_r + \frac{1}{r} g_\theta u_\theta$.

b) Calculer le gradient de $f(x,y)=\theta(x,y)$ (argument, sur le plan fendu).

c) En déduire que les lignes de niveau de l'argument sont orthogonales aux cercles centrés en 0.

Exercice 7 – Fonction dont le gradient est donné

a) Existe-t-il f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\nabla f=(2xy+1, x^2+3y^2)$? Si oui, la déterminer.

b) Même question avec $\nabla f=(y,2x)$.

c) Sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, le champ $\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ vérifie la condition de Schwarz ; est-il un gradient ?

Exercice 8 – Dérivée de la distance à un point le long d'une trajectoire

Un mobile suit $\gamma(t)=(t,t^2)$ et l'on note $d(t)$ sa distance au point $A=(0,1)$.

a) Exprimer $d'(t)$ à l'aide du gradient de $x\mapsto \|x-A\|$.

b) Déterminer les instants où $d'(t)=0$, et interpréter géométriquement.

c) En déduire la distance minimale de A à la parabole.

Exercice 9 – Lignes de niveau orthogonales

Soient $u(x,y)=x^2-y^2$ et $v(x,y)=2xy$.

a) Montrer que $\langle \nabla u, \nabla v\rangle = 0$ et $\|\nabla u\| = \|\nabla v\|$.

b) En déduire que les hyperboles $u=a$ et $v=b$ se coupent à angle droit (hors de l'origine).

c) Vérifier que $u+iv=(x+iy)^2$ et que u, v sont harmoniques.

Exercice 10 – Différentiabilité et dérivées directionnelles

Soit $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

a) Montrer que f admet en $(0,0)$ une dérivée dans toute direction $v=(a,b)$, et la calculer.

b) L'application $v\mapsto D_v f(0,0)$ est-elle linéaire ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$ (regarder la parabole $y = x^2$).

Exercice 11 – Une équation d'Euler en trois variables

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, homogène de degré α : $f(tx) = t^\alpha f(x)$ pour $t > 0$.

a) Montrer la relation d'Euler $\langle \nabla f(x), x \rangle = \alpha f(x)$.

b) Vérifier sur $f(x,y,z) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

c) Montrer que $\partial_x f$ est homogène de degré $\alpha - 1$.

Exercice 12 – Lignes de plus grande pente

Sur la surface $z = f(x,y) = x^2 + 2y^2$, une bille suit une courbe $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ telle que $\gamma'(t) = -\nabla f(\gamma(t))$, avec $\gamma(0) = (1,1)$.

a) Écrire et résoudre le système différentiel.

b) Montrer que la trajectoire est contenue dans la parabole $y = x^2$.

c) Vérifier que $t \mapsto f(\gamma(t))$ est décroissante.

Exercice 13 – Plan tangent au cône et droites du cône

Soit le cône $K : x^2 + y^2 = z^2$.

a) Déterminer les points réguliers de K et le plan tangent en $(3,4,5)$.

b) Montrer que ce plan contient la droite $\mathbb{R}(3,4,5)$.

c) Montrer plus généralement que le plan tangent en tout point régulier passe par l'origine.

Exercice 14 – Intégrale curviligne d'un gradient

Soit $f(x,y) = xe^y + y^2$ et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 avec $\gamma(0) = (1,0)$ et $\gamma(1) = (2,1)$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$.

b) Calculer cette intégrale.

c) Vérifier sur le chemin $\gamma(t) = (1+t, t)$ en calculant directement.

Exercice 15 – Problème : la loi des gaz et les dérivées partielles

Pour un gaz parfait, $PV = nRT$. On considère chacune des variables P, V, T comme fonction des deux autres.

a) Calculer $\dfrac{\partial P}{\partial V}$ (T fixé), $\dfrac{\partial V}{\partial T}$ (P fixé) et $\dfrac{\partial T}{\partial P}$ (V fixé).

b) Montrer que leur produit vaut -1 (et non 1 comme une « simplification » naïve le suggérerait).

c) Établir ce résultat en général pour une relation $F(x,y,z) = 0$ avec $\partial_x F$, $\partial_y F$, $\partial_z F$ non nuls, en admettant que chaque variable s'exprime comme fonction C^1 des deux autres.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).