Plaquette 3 – Compacité et optimisation : existence d'extremums

Compacité — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Existence d'extremums.

— f continue sur K compact non vide : $\exists a, b \in K$, $f(a) = \min_K f$, $f(b) = \max_K f$.

— **Coercivité** : si f est continue sur un fermé F de $\mathbb{R}^n$ et $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, alors f atteint son minimum sur F :

$$\min_F f = \min_{F \cap B_f(0,R)} f \quad \text{pour } R \text{ assez grand}$$

— f continue et > 0 sur un compact $\Rightarrow f \geq m > 0$ sur ce compact.

— Distance à un fermé non vide, diamètre d'un compact : atteints en dimension finie.

— Le maximum de $x^{\mathsf{T}} S x$ sur la sphère unité est atteint, en un vecteur propre de S symétrique.

Correction de l'exercice 1 – Distance d'un point à une parabole

a) $P = \{y - x^2 = 0\}$ est fermé. $P \cap B_f(A, 2)$ est compact non vide (il contient $(0,0)$), et la distance y est atteinte : c'est la distance à P.

b) $d^2 = x^2 + (x^2 - 2)^2 = x^4 - 3x^2 + 4 = g(x^2)$ avec $g(u) = u^2 - 3u + 4$, minimale en $u = \frac{3}{2}$:

$$d(A,P)^2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4 = \frac{7}{4}, \qquad d = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

— atteinte en $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\right)$.

c) La parabole n'est pas convexe et la situation est symétrique par rapport à l'axe $x = 0$: deux projetés.

Réponse. $d = \frac{\sqrt{7}}{2}$, atteinte en $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 2 – Maximum d'un produit sur la sphère

a) S est fermé borné de $\mathbb{R}^3$, donc compact ; f est continue.

b) $(x^2y^2z^2)^{1/3} \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{3} = \frac{1}{3}$, d'où

$$|xyz| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

c) Égalité dans AM-GM si et seulement si $x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{3}$. Le maximum $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ est atteint aux points $\frac{1}{\sqrt{3}}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ ayant un nombre pair de signes $-$.

Réponse. $\max_S xyz = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, aux points $\frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$.

Correction de l'exercice 3 – Meilleure approximation uniforme affine

a) Dans l'evn de dimension finie $\mathrm{Vect}(1, X, X^2)$, la distance à $\mathbb{R}_1[X]$ est atteinte (on minimise une fonction continue et coercive des coefficients).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $e(x) = x^2 - x + \frac{1}{8}$ vaut $\frac{1}{8}$ en 0 et 1, $-\frac{1}{8}$ en $\frac{1}{2}$, et $|e| \leq \frac{1}{8}$ sur $[0,1]$ (parabole de sommet $\frac{1}{2}$).

c) Si p affine vérifie $\|x^2 - p\|_\infty < \frac{1}{8}$, alors $q = p - \left(x - \frac{1}{8}\right) = e - (x^2 - p)$ vérifie

$$q(0) > 0, \qquad q\left(\frac{1}{2}\right) < 0, \qquad q(1) > 0$$

— impossible pour une fonction affine (deux changements de signe). Le minimum vaut $\frac{1}{8}$.

Réponse. Meilleure approximation $x - \frac{1}{8}$, erreur $\frac{1}{8}$ (équioscillation en 0, $\frac{1}{2}$, 1).

Correction de l'exercice 4 – Maximum d'une fonction tendant vers zéro à l'infini

a) Si $f(x_0) = c > 0$, il existe A avec $|f| < c$ hors de $[-A, A]$; sur le compact $[-A, A]$ (qui contient x_0), f atteint un maximum $\geq c$, qui est le maximum global.

b) $f'(x) = (1 - 2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$ s'annule en $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\max f = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$$

c) Non : $g(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ a pour borne inférieure 0, non atteinte.

Réponse. Maximum atteint si f prend une valeur > 0 ; $\max x\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$; le minimum peut ne pas être atteint.

Correction de l'exercice 5 – Minoration uniforme d'une fonction positive

a) f atteint son minimum en un point a, et $m = f(a) > 0$.

b) $P > 0$ sur le cercle unité (compact) : $P \geq m > 0$ sur le cercle, puis par homogénéité de degré 2, $P(x,y) \geq m(x^2 + y^2)$. En polaires, $P = r^2\left(1 + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)$, de minimum

$$m = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

c) Non : $f(x) = x > 0$ sur $]0,1]$ n'est minorée par aucun $m > 0$.

Réponse. Min atteint, donc > 0 ; $P \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$; faux sur $]0,1]$.

Correction de l'exercice 6 – Existence d'un vecteur propre par compacité

a) Σ est compacte (fermée bornée) et q continue.

b) $q(x_t) = \frac{q(u) + 2t\langle Su, h\rangle + t^2 q(h)}{1 + t^2\|h\|^2}$. La fonction $t \mapsto q(x_t)$ est dérivable et maximale en $t = 0$, donc sa dérivée en 0 est nulle :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q(x_t)\big|_{t=0} = 2\langle Su, h\rangle = 0$$

c) Su est orthogonal à $u^\perp$, donc $Su \in (u^\perp)^\perp = \mathbb{R}u$: $Su = \lambda u$ avec $\lambda = q(u)$. C'est le point de départ d'une preuve du théorème spectral.

Réponse. Le maximum de q sur la sphère est atteint en un vecteur propre, de valeur propre $\lambda = \max q$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Diamètre d'un compact

a) $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ est continue sur le compact $K \times K$.

b) Pour x fixé, $y \mapsto \|x-y\|$ est convexe : son maximum sur le triangle (enveloppe convexe des sommets) est atteint en un sommet. Par symétrie, le diamètre est atteint en deux sommets : c'est le plus grand côté.

c) Côtés 3, 4 et $\sqrt{9+16} = 5$:

$$\delta(T) = 5$$

Réponse. Diamètre atteint sur un compact ; pour un triangle, plus grand côté ; ici 5.

Correction de l'exercice 8 – Une fonction définie par un maximum

a) Pour x fixé, $y \mapsto f(x,y)$ est continue sur le compact $[0,1]$.

b) Heine : pour $\varepsilon > 0$, il existe δ avec $|f(x,y) - f(x',y)| \leq \varepsilon$ dès que $|x-x'| \leq \delta$, pour tout y. Alors $f(x,y) \leq f(x',y) + \varepsilon \leq g(x') + \varepsilon$, puis $g(x) \leq g(x') + \varepsilon$, et symétriquement :

$$|g(x) - g(x')| \leq \varepsilon$$

c) Pour $x \in [0,1]$, $y \mapsto xy - y^2$ est maximale en $y = \frac{x}{2} \in [0,1]$: $g(x) = \frac{x^2}{4}$, continue ✓.

Réponse. g continue (continuité uniforme de f) ; ici $g(x) = \frac{x^2}{4}$.

Correction de l'exercice 9 – Bijection continue d'un compact

a) Un fermé F de K est compact, et $f(F)$ est compact (image continue), donc fermé.

b) f^{-1} est continue si et seulement si l'image réciproque par f^{-1} de tout fermé, c'est-à-dire l'image par f de ce fermé, est fermée : c'est a).

c) L'application est continue et bijective, mais sa réciproque n'est pas continue en $(1,0)$: les points $\left(\cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \sin\left(2\pi - \frac{1}{n}\right)\right) \to (1,0)$ ont pour antécédents

$$2\pi - \frac{1}{n} \to 2\pi \neq 0 = f^{-1}(1,0)$$

Réponse. Image d'un fermé = compact : f^{-1} continue ; contre-exemple sur $[0, 2\pi[$ (non compact).

Correction de l'exercice 10 – Maximum d'une trace sur le groupe orthogonal

a) $O(n)$ est compact et φ linéaire, donc continue.

b) Les colonnes de Q sont unitaires, d'où $|q_{ii}| \leq 1$, et

$$\varphi(Q) = \sum_i d_i q_{ii} \leq \sum_i d_i = \mathrm{tr} D$$

c) Le maximum $\mathrm{tr} D$ est atteint en $Q = I$. (Par la décomposition polaire, on en déduit que $\max_{Q \in O(n)} \mathrm{tr}(AQ)$ est la somme des valeurs singulières de A.)

Réponse. $O(n)$ compact ; $\mathrm{tr}(DQ) \leq \mathrm{tr} D$, atteint en $Q = I$.

Correction de l'exercice 11 – Localement lipschitzienne sur un compact

a) Localement lipschitzienne implique continue ; continue sur un compact, donc bornée par un M.

b) $n\|x_n - y_n\| < |f(x_n) - f(y_n)| \leq 2M$, donc $\|x_n - y_n\| < \frac{2M}{n} \to 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $x_{\varphi(n)} \to a$, et $y_{\varphi(n)} \to a$ aussi. Pour n grand, les deux sont dans $B(a, r_a)$, où

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \leq k_a \|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\|$$

— ce qui contredit l'inégalité de b) dès que $\varphi(n) > k_a$.

Réponse. Localement lipschitzienne sur un compact ⇒ lipschitzienne.

Correction de l'exercice 12 – Triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle

a) L'aire est une expression polynomiale en les $\cos\theta_k$, $\sin\theta_k$ (déterminant), continue sur un compact.

b) Pour le triangle optimal, chaque angle au centre est dans $[0, \pi]$ (sinon on augmente l'aire), et par concavité (Jensen) :

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 3\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

c) Égalité pour $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2\pi}{3}$: triangle équilatéral, d'aire $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Réponse. Maximum atteint (compacité) : triangle équilatéral, aire $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Correction de l'exercice 13 – Élément de norme minimale d'un fermé

a) Soit $a \in F$ et $R = \|a\|$. Le minimum de la norme sur F est celui sur $F \cap B_f(0, R)$, compact non vide.

b) Sur F, $x^2 + y^2 \geq 2xy \geq 2$, avec égalité pour $x = y = 1$:

$$\min_F \|\cdot\|_2 = \sqrt{2}$$

c) $x + y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2$, égalité en $(1, 1)$: $\min_F \|\cdot\|_1 = 2$.

Réponse. Minimum atteint (fermé ∩ boule) ; $\sqrt{2}$ pour $\|\cdot\|_2$, 2 pour $\|\cdot\|_1$, en $(1, 1)$.

Correction de l'exercice 14 – Polynôme strictement positif sur un segment

a) P continue sur le compact $[0, 1]$ atteint son minimum m, qui est > 0.

b) $0 < \frac{1}{P} \leq \frac{1}{m}$, d'où la majoration de l'intégrale.

c) $P = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, de minimum $m = \frac{3}{4}$ en $\frac{1}{2}$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} \leq \frac{4}{3}$$

— (la valeur exacte est $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1{,}209$).

Réponse. $P \geq m > 0$; ici $m = \frac{3}{4}$ et l'intégrale est $\leq \frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : point minimisant une somme de carrés de distances

a) $f(P) \geq PA^2 \to +\infty$ quand $\|P\| \to +\infty$; minimum atteint sur une boule (compact).

b) $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA}$, et en développant, les termes croisés s'annulent car $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$:

$$f(P) = 3PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

c) Minimum en $P = G = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, de valeur $\frac{8}{9} + \frac{20}{9} + \frac{20}{9} = \frac{16}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $g(P) = PA + PB + PC$ est continue et coercive : le minimum existe (point de Fermat). Ce n'est pas G en général : ici le minimum est atteint au point d'où les côtés sont vus sous des angles de 120°, différent de G (en G ces angles ne valent pas 120°).

Réponse. $f(P) = 3PG^2 + f(G)$; minimum $\frac{16}{3}$ en $G = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$; le point de Fermat existe aussi, distinct de G.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).