Plaquette 4 – Compacité, suites et uniformité

Compacité — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Schéma « par l'absurde + extraction ».

— Supposer la propriété uniforme fausse : il existe $\varepsilon_0 > 0$ et des points x_n (et y_n) qui la violent.
— Extraire $x_{\varphi(n)} \to a \in K$ (Bolzano-Weierstrass dans le compact).
— Utiliser la continuité **au point** a pour contredire.

Résultats associés.

— **Heine** : continue sur un compact ⇒ uniformément continue.
— **Dini** : f_n continues sur K compact, (f_n) croissante, convergeant simplement vers f continue ⇒ convergence uniforme.
— **Continuité des intégrales à paramètre** : si f est continue sur $[a,b]\times[c,d]$, alors

$$F(x) = \int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t \text{ est continue sur } [a,b]$$

Correction de l'exercice 1 – Théorème de Dini

a) $[a,b]$ est compact : Bolzano-Weierstrass.

b) (g_n) décroît : $g_p(x_{\varphi(n)}) \geq g_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \geq \varepsilon$. En faisant $n \to +\infty$ par continuité de g_p : $g_p(a) \geq \varepsilon$.

c) Cela contredit $g_p(a) \to 0$. Donc $\|g_n\|_\infty \to 0$. Pour l'application : $(1+\frac{x}{n})^n$ est croissante en n (pour $x \geq 0$) et converge vers e^x continue, d'où

$$\sup_{[0,1]} \mathrm{e}^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Réponse. Extraction et monotonie : contradiction ; $(1+\frac{x}{n})^n \to \mathrm{e}^x$ uniformément sur $[0,1]$.

Correction de l'exercice 2 – Continuité d'une intégrale à paramètre

a) Heine sur le compact $[a,b]\times[c,d]$.

b) Pour $\varepsilon > 0$, soit δ tel que $|f(x,t)-f(x',t)| \leq \varepsilon$ si $|x-x'| \leq \delta$, pour tout t. En intégrant :

$$|F(x)-F(x')| \leq \int_c^d |f(x,t)-f(x',t)|\,\mathrm{d}t \leq (d-c)\varepsilon$$

c) $F(0) = 1$, et $0 \leq 1 - \mathrm{e}^{-xt^2} \leq xt^2$, d'où $|F(x)-F(0)| \leq \frac{x}{3}$.

Réponse. Heine donne la continuité de F ; ici $F(0) = 1$ et $|F(x)-1| \leq \frac{x}{3}$.

Correction de l'exercice 3 – Une isométrie d'un compact dans lui-même est surjective

a) $f(K)$ est compact (image continue), donc fermé, et $a \notin f(K)$: $d(a,f(K)) > 0$.

b) Pour $n > m$: $\|a_n - a_m\| = \|f^m(a_{n-m}) - f^m(a)\| = \|a_{n-m} - a\| \geq \delta$ car $a_{n-m} \in f(K)$.

c) La suite (a_n) du compact K n'a alors aucune sous-suite de Cauchy, donc aucune

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

sous-suite convergente : contradiction. Sur $[0,+\infty[$ (non compact), $x \mapsto x+1$ est une isométrie non surjective :

$$0 \notin f([0,+\infty[) = [1,+\infty[$$

Réponse. Les itérés de $a \notin f(K)$ restent à distance $\geq \delta$: contradiction ; $x+1$ sur $[0,+\infty[$ contre-exemple.

Correction de l'exercice 4 – Valeurs d'adhérence d'une suite d'un compact

a) Bolzano-Weierstrass.

b) Soit $a_k \in A$ avec $a_k \to a$. Pour tout k, il existe une infinité d'indices n avec $\|u_n - a_k\| \leq \frac{1}{k}$. On construit $n_1 < n_2 < \dots$ avec $\|u_{n_k} - a_k\| \leq \frac{1}{k}$, d'où

$$\|u_{n_k} - a\| \leq \frac{1}{k} + \|a_k - a\| \to 0$$

c) Si $u_{\varphi(n)} \to a$, alors $u_{\varphi(n)+1} = f(u_{\varphi(n)}) \to f(a)$: $f(a) \in A$.

Réponse. A compact non vide, et stable par f pour une suite récurrente.

Correction de l'exercice 5 – Limite d'une suite de puissances

a) Bornée en dimension finie : Bolzano-Weierstrass.

b) $A^{2k} = (A^k)^2 \to L^2$ et $A^{2k} \to L$ (sous-suite), d'où $L^2 = L$. Et $A^{k+1} = AA^k \to AL$, d'où $AL = L$.

c) $A^2 = A$: $A^k = A \to A$, projecteur ✓. Pour la rotation d'angle droit, (A^k) est périodique de période 4 : quatre valeurs d'adhérence I, A, $-I$, $-A$, et pas de limite (une limite L vérifierait $AL = L$ avec L orthogonale, donc $A = I$) :

$$A^4 = I, \quad A \neq I$$

Réponse. Valeur d'adhérence par compacité ; une limite est un projecteur fixé par A ; la rotation d'angle droit n'a pas de limite.

Correction de l'exercice 6 – Approximation uniforme par des fonctions affines par morceaux

a) Heine sur $[0,1]$.

b) Pour $x \in \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$, $g(x)$ est une moyenne pondérée de $f\left(\frac{k}{N}\right)$ et $f\left(\frac{k+1}{N}\right)$, chacune à distance $\leq \varepsilon$ de $f(x)$, donc $|g(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ (même mieux que 2ε).

c) $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$, donc $\delta = \varepsilon^2 = 0{,}01$ convient :

$$N = 100$$

— garantit $\|\sqrt{\cdot} - g\|_\infty \leq 0{,}1$.

Réponse. Heine fournit δ ; l'interpolée affine est à distance $\leq \varepsilon$; pour $\sqrt{\cdot}$, $N = 100$.

Correction de l'exercice 7 – Emboîtement et diamètre

a) Intersection décroissante de compacts non vides (exercice de la plaquette 1).

b) Si $x, y \in \bigcap K_n$, alors $\|x - y\| \leq \delta(K_n) \to 0$.

c) Des segments emboîtés de longueur tendant vers 0 ont une intersection réduite à un point. Ici les bornes encadrent e et la longueur vaut $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \to 0$:

$$\bigcap_n K_n = \{\mathrm{e}\}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\bigcap K_n$ est un singleton ; ici $\{\mathrm{e}\}$.

Correction de l'exercice 8 – Une suite récurrente sur un compact

a) Si $u_1 \geq u_0$, alors $u_2 = f(u_1) \geq f(u_0) = u_1$, et par récurrence la suite croît ; sinon elle décroît.

b) Monotone et bornée : convergente vers $\ell \in [0,1]$ (compact), et $\ell = f(\ell)$ par continuité.

c) f est croissante sur $[0,1]$, à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. $u_1 = \frac{1}{2} \geq u_0$: la suite croît vers un point fixe, solution de $x^2 - 2x + 1 = 0$, soit

$$\ell = 1$$

Réponse. Suite monotone bornée, limite point fixe ; ici $u_n \nearrow 1$.

Correction de l'exercice 9 – Fonction continue et uniformément continue sur un borné

a) Le prolongement est continu sur le compact $[0,1]$, donc uniformément continu (Heine), et a fortiori sa restriction.

b) Si f est uniformément continue, l'image d'une suite de Cauchy est de Cauchy ; les limites en 0 et 1 existent donc, et définissent le prolongement.

c) $x\ln x \to 0$ en 0 et tend vers 0 en 1 : prolongeable, donc uniformément continue.
$\ln x \to -\infty$ en 0 : non prolongeable, donc pas uniformément continue. Concrètement :

$$\ln\frac{1}{n} - \ln\frac{1}{2n} = \ln 2 \not\to 0$$

— alors que $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \to 0$.

Réponse. Sur un intervalle borné, uniformément continue $\Leftrightarrow$ prolongeable aux bornes ; $x\ln x$ oui, $\ln x$ non.

Correction de l'exercice 10 – Distance et fonction distance sur un compact

a) $y \mapsto \|x - y\|$ est continue sur le compact K.

b) Si $p, q \in K$ réalisent la distance d, le milieu $m = \frac{p+q}{2} \in K$ (convexité) et

$$\|x - m\|^2 = \frac{\|x-p\|^2 + \|x-q\|^2}{2} - \frac{\|p-q\|^2}{4} = d^2 - \frac{\|p-q\|^2}{4}$$

— ce qui impose $\|p - q\| = 0$ (sinon m serait plus proche).

c) Tous les points du cercle sont à distance 1 de 0 : une infinité de projetés.

Réponse. Projeté existant (compacité), unique si K convexe ; le centre d'un cercle a une infinité de projetés.

Correction de l'exercice 11 – Continuité uniforme d'une fonction de deux variables

a) Continue sur un compact : Heine.

b) $\partial_x f = \frac{y(1+y^2-x^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$. Avec $|y| \leq r$, $|1 + y^2 - x^2| \leq 1 + r^2$:

$$|\partial_x f| \leq \frac{r(1+r^2)}{(1+r^2)^2} = \frac{r}{1+r^2} \leq \frac{1}{2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— de même pour $\partial_y f$. Par l'inégalité des accroissements finis (sur le segment $[p, q]$), $|f(p) - f(q)| \leq \frac{1}{2}\|p - q\|_1$.

c) Lipschitzienne ⇒ uniformément continue sur $\mathbb{R}^2$.

Réponse. Heine sur le disque ; dérivées partielles bornées par $\frac{1}{2}$: lipschitzienne, uniformément continue sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 12 – Convergence uniforme sur tout compact

a) Sur $[-A, A]$: $|e^x - f_n(x)| \leq \sum_{k>n} \frac{A^k}{k!} \to 0$ (reste d'une série convergente), indépendamment de x.

b) $e^x - f_n(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ (f_n est polynomiale) : $\sup_{\mathbb{R}} |e^x - f_n| = +\infty$.

c) Un compact de $\mathbb{R}$ est borné, donc inclus dans un $[-A, A]$:

$$\sup_K |e^x - f_n(x)| \leq \sum_{k>n} \frac{A^k}{k!}$$

Réponse. Convergence uniforme sur tout compact (reste de la série de e^A), pas sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 13 – Application contractante faible et itérés

a) $u_{n+1} = \|f(x_n) - f(\ell)\| \leq \|x_n - \ell\| = u_n$.

b) Si $x_{\varphi(n)} \to a$, alors $\|x_{\varphi(n)} - \ell\| \to \|a - \ell\|$, et cette suite extraite tend vers λ. Aussi $x_{\varphi(n)+1} = f(x_{\varphi(n)}) \to f(a)$, d'où $\|f(a) - \ell\| = \lambda$.

c) Si $\lambda > 0$, alors $a \neq \ell$ et

$$\|f(a) - f(\ell)\| < \|a - \ell\| = \lambda$$

— contradiction. Donc $\lambda = 0$ et $x_n \to \ell$.

Réponse. $\|x_n - \ell\|$ décroît vers λ, et $\lambda > 0$ contredirait l'inégalité stricte : $x_n \to \ell$.

Correction de l'exercice 14 – Le sinus itéré

a) Accroissements finis : $\sin x - \sin y = \cos c\,(x - y)$ avec c strictement entre x et y, donc $c > 0$ et $|\cos c| < 1$.

b) $[0, 1]$ est compact, stable par sin, et 0 est l'unique point fixe : $u_n \to 0$.

c) $\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \to 1$ en 0 : aucune constante $k < 1$ ne convient. La convergence est en

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

— bien plus lente qu'une convergence géométrique.

Réponse. Contraction faible sur $[0, 1]$: $u_n \to 0$, lentement ($\sim \sqrt{3/n}$), sans contraction stricte.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : continuité d'une borne supérieure à paramètre

a) Pour x fixé, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur le compact $[0, 1]$.

b) f est continue sur le compact $[0, 2] \times [0, 1]$, donc uniformément continue (Heine) : pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x, t) - f(x', t)| \leq \varepsilon$ pour tout t dès que $|x - x'| \leq \delta$. Alors $f(x, t) \leq f(x', t) + \varepsilon \leq M(x') + \varepsilon$ pour tout t, d'où $M(x) \leq M(x') + \varepsilon$, et symétriquement : $|M(x) - M(x')| \leq \varepsilon$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $M(0) = 0$. Pour $t \in [0,1]$: $\sin(xt) \le xt \le x$ et $\sin(xt) \le 1$, avec $\mathrm{e}^{-t} \le 1$:

$$M(x) \le \min(x, 1)$$

d) Pour $x \le x'$ dans $[0,2]$ et $t \in [0,1]$, xt et $x't$ sont dans $[0,2]$, mais sin n'est croissante que sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: comme $2 > \frac{\pi}{2}$, on raisonne autrement. Pour t fixé où le max $M(x)$ est atteint, $t' = \frac{x}{x'}t \in [0,1]$ vérifie $\sin(x't') = \sin(xt)$ et $\mathrm{e}^{-t'} \ge \mathrm{e}^{-t}$, d'où $M(x') \ge f(x', t') \ge f(x,t) = M(x)$.

Réponse. M continue (Heine), $M(0) = 0$, $M(x) \le \min(x,1)$, et M croissante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).