Plaquette 1 – Parties compactes, Bolzano-Weierstrass et applications

Compacité — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition séquentielle. K est **compact** si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite convergeant **dans** K.

- **Théorème de Borel-Lebesgue (dimension finie)** : dans un evn de dimension finie, K est compact $\Leftrightarrow$ K est **fermé et borné**.
- **Attention** : en dimension **infinie**, fermé borné n'implique **pas** compact (la boule unité de $C([0\,;1])$ n'est pas compacte — théorème de Riesz).
- **Bolzano-Weierstrass** : toute suite **bornée** de $\mathbb{R}^n$ admet une sous-suite convergente.

Propriétés.

- Un compact est **fermé** et **borné**.
- Une partie **fermée** d'un compact est compacte.
- Un **produit fini** de compacts est compact.
- L'**image continue** d'un compact est compacte.
- **Théorème des bornes** : une fonction **réelle continue** sur un compact non vide est bornée et **atteint** ses bornes.
- **Théorème de Heine** : une fonction continue sur un compact est **uniformément continue**.

Distance à une partie.

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} \|x-a\|$$

- $x \mapsto d(x,A)$ est 1-**lipschitzienne**.
- Si A est **compact** (ou fermé en dimension finie), l'infimum est **atteint** : il existe un projeté $a_0 \in A$ avec $\|x-a_0\| = d(x,A)$.
- $d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

Suites et valeurs d'adhérence. Une suite d'un compact converge **si et seulement si** elle admet **une unique** valeur d'adhérence.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître un compact

- a) **Compact** : le cercle unité est **fermé** (image réciproque de $\{1\}$ par une fonction continue) et **borné** (inclus dans la boule de rayon 1).
- b) **Non compact** : fermé, mais **non borné** (les points $\left(n, \frac{1}{n}\right)$ s'éloignent indéfiniment).
- c) **Non compact** : borné, mais **non fermé** — la suite $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ est dans C et converge vers $(0,0) \notin C$.
- **Méthode** : en dimension finie, on teste **les deux** conditions. Une seule qui manque suffit à conclure.
- **Contre-exemple séquentiel** : pour prouver la non-compacité, exhiber une suite dont aucune sous-suite ne converge dans l'ensemble est la voie la plus directe.

Réponse. a) oui · b) non (non borné) · c) non (non fermé).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Bolzano-Weierstrass

— Pour tout n, $\|u_n\|_2 = \sqrt{\cos^2 n + \sin^2 n} = 1$: la suite est dans le **cercle unité**, qui est **compact**.
— Par définition de la compacité (ou par **Bolzano-Weierstrass**, la suite étant bornée dans $\mathbb{R}^2$), il existe une extraction φ telle que $(u_{\varphi(n)})$ **converge**, et sa limite est dans le cercle.
— **La suite elle-même diverge** : π étant irrationnel, les points u_n sont **denses** dans le cercle ; il y a donc une infinité de valeurs d'adhérence — en fait **tout** le cercle.
— **Rappel** : une suite d'un compact converge si et seulement si elle a une **unique** valeur d'adhérence. Ici ce n'est pas le cas.
— **Portée du théorème** : il **affirme une existence** sans construire l'extraction — outil de démonstration, pas de calcul.

Réponse. La suite vit dans le cercle unité, compact : extraction possible.

Correction de l'exercice 3 – Fermé dans un compact

Soit (x_n) une suite d'éléments de F.
— Comme $F \subset K$ et que K est **compact**, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un $\ell \in K$.
— Or les $x_{\varphi(n)}$ appartiennent à F, qui est **fermé** : la limite ℓ appartient donc à F.
— On a extrait de (x_n) une sous-suite convergeant **dans** F : F est **compact**.
— **Exemple** : dans le disque fermé (compact), le cercle est fermé, donc compact ✓
— **Contre-exemple sans fermeture** : le disque **ouvert** est inclus dans le disque fermé compact, mais n'est pas compact.

Réponse. Extraction dans K, puis la limite reste dans F car F est fermé.

Correction de l'exercice 4 – Image continue

— K est **compact** et f **continue**, donc $f(K)$ est un **compact de** $\mathbb{R}$: un fermé borné.
— K étant de plus **connexe par arcs**, $f(K)$ est un **intervalle** : c'est donc un **segment** $[m\,;M]$.
— **Paramétrage** :

$$f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)$$

— Quand θ décrit $[0\,;2\pi]$, $\cos 2\theta$ décrit $[-1\,;1]$.
— **Conclusion** : $f(K) = [-1\,;1]$.
— **Bornes atteintes** : $M = 1$ en $(\pm 1, 0)$ et $m = -1$ en $(0, \pm 1)$ ✓ — conformément au théorème des bornes.

Réponse. $f(K) = [-1\,;1]$.

Correction de l'exercice 5 – Distance à un fermé

— C est **compact**, donc la fonction continue $M \mapsto \|A - M\|$ y **atteint son minimum** : l'infimum est bien atteint.
— **Géométrie** : $\|OA\| = \sqrt{9+16} = 5$. Le point le plus proche est l'intersection de $[OA]$ avec le cercle, soit $M_0 = \frac{A}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
— **Distance** : $d(A, C) = \|OA\| - 1 = 4$.
— **Vérification** : $|A - M_0| = |(3 - 0{,}6,\ 4 - 0{,}8)| = \|(2{,}4\,;3{,}2)\| = \sqrt{5{,}76 + 10{,}24} = \sqrt{16} = 4$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Rôle de la compacité** : sur un ensemble seulement **ouvert** (par exemple le disque ouvert privé du centre), l'infimum peut ne pas être atteint.

Réponse. $d(A,C) = 4$, atteinte en $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Correction de l'exercice 6 – 1-lipschitzianité de la distance

Soient $x, y \in E$ et $a \in A$.

— **Inégalité triangulaire** : $d(x,A) \leq \|x-a\| \leq \|x-y\| + \|y-a\|$.

— Cette majoration vaut pour **tout** $a \in A$; en passant à la **borne inférieure** sur a :

$$d(x,A) \leq \|x-y\| + d(y,A)$$

— Donc $d(x,A) - d(y,A) \leq \|x-y\|$, et par symétrie l'inégalité inverse.

— **Conclusion** : $|d(x,A) - d(y,A)| \leq \|x-y\|$ — l'application est 1-**lipschitzienne**, donc **continue**, sans aucune hypothèse sur A.

— **Application** : $\{x \mid d(x,A) < \varepsilon\}$ est un **ouvert** (image réciproque de $]-\infty\,;\varepsilon[$), ce qui donne les « voisinages tubulaires » d'un ensemble.

Réponse. Passage à l'infimum dans $d(x,A) \leq \|x-y\| + \|y-a\|$.

Correction de l'exercice 7 – Théorème de Heine

— $]0\,;1]$ n'est **pas compact** (non fermé), Heine ne s'applique pas — il faut examiner directement.

— **Contre-exemple** : posons $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$.

— $|x_n - y_n| \to 0$ (les deux tendent vers 0).

— Pourtant $f(x_n) = \sin(2n\pi) = 0$ et $f(y_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$, donc $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$ ne tend pas vers 0.

— **Conclusion** : f n'est **pas uniformément continue** sur $]0\,;1]$.

— **Diagnostic** : f oscille de plus en plus vite près de 0 ; elle n'admet pas de prolongement continu en 0 — or une fonction uniformément continue sur $]0\,;1]$ se prolongerait continûment sur le compact $[0\,;1]$.

Réponse. Non : oscillations infinies près de 0.

Correction de l'exercice 8 – Compacts et suites

Raisonnement par l'absurde. Supposons que (x_n) ne converge pas vers ℓ.

— Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une extraction φ telle que $\|x_{\varphi(n)} - \ell\| \geq \varepsilon$ pour tout n.

— La suite extraite vit dans le **compact** K : on peut en extraire à nouveau une sous-suite convergeant vers un $\ell' \in K$.

— ℓ' est une **valeur d'adhérence** de (x_n), donc $\ell' = \ell$ par hypothèse d'unicité.

— Mais en passant à la limite dans $\|x_{\varphi(n)} - \ell\| \geq \varepsilon$, on obtient $\|\ell' - \ell\| \geq \varepsilon > 0$: **contradiction**.

— **Conclusion** : $x_n \to \ell$.

— **L'hypothèse de compacité est indispensable** : dans $\mathbb{R}$, la suite $x_n = n + (-1)^n n$ (valant 0 ou $2n$) a pour unique valeur d'adhérence 0 mais ne converge pas — elle n'est pas bornée.

Réponse. Par l'absurde, une seconde extraction fournit une autre valeur d'adhérence.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Sphère unité et normes

La démonstration se déroule en deux temps, et la compacité intervient dans le second.

— **Majoration** : pour toute norme N, on obtient $N(x) \leq \beta \|x\|_\infty$ par inégalité triangulaire — **sans** compacité. Cela prouve que N est **continue** pour $\|\cdot\|_\infty$.
— **Minoration** : on veut $\alpha > 0$ tel que $N(x) \geq \alpha$ sur la sphère $S = \{\|x\|_\infty = 1\}$.
— N est continue sur S, qui est **fermée et bornée**, donc **compacte** : N y **atteint son minimum** α en un point $x_0 \in S$.
— $x_0 \neq 0$ (car $\|x_0\|_\infty = 1$), donc $\alpha = N(x_0) > 0$.
— **Sans compacité** : on aurait seulement $\alpha = \inf_S N \geq 0$, sans garantie que cet infimum soit **atteint** ni **strictement positif** — et la conclusion tomberait.
— **C'est précisément ce qui échoue en dimension infinie** : la sphère unité n'y est pas compacte (théorème de Riesz), et les normes n'y sont effectivement pas équivalentes.

Réponse. Elle garantit que $\inf_S N$ est **atteint**, donc strictement positif.

Correction de l'exercice 10 – Compacité et produit

— **Compacité** : $K_1 \times K_2 = [0\,;1] \times [2\,;3]$ est **fermé** (produit de fermés) et **borné**, donc compact dans $\mathbb{R}^2$.
— La fonction $f(x, y) = xy - x^2$ est continue : elle **atteint son maximum**.
— **Optimisation en y à x fixé** : f est croissante en y (coefficient $x \geq 0$), donc le maximum est atteint en $y = 3$.
— **Puis en x** : on maximise $g(x) = 3x - x^2$ sur $[0\,;1]$. $g'(x) = 3 - 2x > 0$ sur $[0\,;1]$, donc g croît : maximum en $x = 1$.
— **Maximum** : $f(1, 3) = 3 - 1 = 2$.
— **Contrôle** : $f(1, 2) = 1$, $f(0{,}5\,; 3) = 1{,}5 - 0{,}25 = 1{,}25$, $f(0, 3) = 0$ — toutes ces valeurs sont ≤ 2 ✓

Réponse. Maximum 2, atteint en $(1, 3)$.

Correction de l'exercice 11 – Contre-exemple en dimension infinie

Il suffit d'exhiber une suite de la boule dont **aucune** sous-suite ne converge.

— Posons $f_n(x) = x^n$. Alors $\|f_n\|_\infty = 1$: toutes ces fonctions sont dans la boule unité fermée.
— **Écarts mutuels** : pour $p < q$, $\|f_p - f_q\|_\infty = \max_{[0;1]}(x^p - x^q)$, qui tend vers 1 quand $q \to +\infty$ à p fixé ; en particulier les écarts ne tendent **pas** vers 0.
— Aucune sous-suite ne peut donc être de Cauchy, donc aucune ne converge.
— **Conclusion** : la boule unité n'est **pas compacte**.
— **Argument alternatif plus net** : la limite **simple** de f_n est discontinue en 1 ; toute sous-suite a la même limite simple, donc ne peut converger uniformément vers une fonction continue.
— **Théorème de Riesz** : la boule unité fermée d'un evn est compacte **si et seulement si** l'espace est de **dimension finie**.

Réponse. $f_n(x) = x^n$: aucune sous-suite ne converge uniformément.

Correction de l'exercice 12 – Fonction coercive et minimum

a) $x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2}$ (inégalité $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$) et $4|xy| \leq 2r^2$, d'où la minoration, qui tend vers $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $f(0,0)=0$. Il existe R avec $f>0$ pour $r>R$. Sur le compact $B_f(0,R)$, f continue atteint un minimum $m \le f(0,0)=0$, qui est aussi le minimum global.

c) $\nabla f = (4x^3-4y, 4y^3-4x) = 0$ donne $y=x^3$ et $x^9=x$, soit $x \in \{0,1,-1\}$: points $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. Le minimum, atteint en un point critique, vaut

$$\min f = f(1,1) = f(-1,-1) = 1+1-4 = -2$$

Réponse. f coercive : minimum atteint ; $\min f = -2$ en $\pm(1,1)$.

Correction de l'exercice 13 – Distance entre un compact et un fermé

a) $d(\cdot, F)$ est 1-lipschitzienne. Pour $x \in K$, $x \notin F = \overline{F}$, donc $d(x,F)>0$.

b) Fonction continue strictement positive sur un compact : elle atteint son minimum, qui est >0.

c) F_1 et F_2 sont fermés (images réciproques) et disjoints ($xy=1$ impose $y \neq 0$). Mais

$$d\left(\left(n, \frac{1}{n}\right), (n,0)\right) = \frac{1}{n} \to 0$$

— donc $d(F_1,F_2)=0$.

Réponse. $d(K,F)>0$ si K compact ; faux pour l'axe et l'hyperbole $xy=1$.

Correction de l'exercice 14 – Intersection décroissante de compacts

a) (x_n) est une suite du compact K_0 : une sous-suite $x_{\varphi(n)}$ converge vers $\ell \in K_0$.

b) Pour p fixé, $x_{\varphi(n)} \in K_{\varphi(n)} \subset K_p$ dès que $\varphi(n) \ge p$; K_p est fermé, donc $\ell \in K_p$. Ainsi

$$\ell \in \bigcap_p K_p$$

c) $\bigcap [n, +\infty[= \varnothing$ (fermés non bornés) et $\bigcap \left]0, \frac{1}{n}\right] = \varnothing$ (bornés non fermés).

Réponse. Valeur d'adhérence commune : $\bigcap K_n \neq \varnothing$; contre-exemples $[n,+\infty[$ et $]0,\frac{1}{n}]$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : distance entre deux compacts

L'infimum est atteint. L'application $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ est **continue** sur $K \times L$.

— $K \times L$ est un **produit de compacts**, donc compact.
— Le théorème des bornes donne l'existence de $(x_0,y_0) \in K \times L$ réalisant le minimum : $d(K,L) = \|x_0 - y_0\|$.

Stricte positivité. Si $d(K,L)=0$, alors $\|x_0-y_0\|=0$, donc $x_0=y_0 \in K \cap L$.

— Ceci contredit l'hypothèse $K \cap L = \varnothing$.
— Donc $d(K,L)>0$.

L'hypothèse de compacité est indispensable. Avec $K=\{(x,0)\}$ (l'axe des abscisses, fermé non borné) et $L = \left\langle \left(x, \frac{1}{x}\right), x>0 \right\rangle$ (fermé non borné) :

— les deux ensembles sont **fermés et disjoints**, mais $d(K,L)=0$ car les points $\left(n, \frac{1}{n}\right)$ et $(n,0)$ sont à distance $\frac{1}{n} \to 0$.
— **Morale** : « fermés disjoints » ne suffit pas ; il faut qu'au moins l'un des deux soit **compact**.

Réponse. $K \times L$ compact : le minimum est atteint et non nul.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).