Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : la compacité en analyse, algèbre et géométrie

Compacité — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Se ramener à un compact.

— **Coercivité** : si f est continue sur $\mathbb{R}^n$ et $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, il existe R tel que $f > f(0)$ hors de $\overline{B}(0,R)$; le minimum de f sur $\overline{B}(0,R)$ est un minimum global.

— **Périodicité** : $f(\mathbb{R}) = f([0,T])$ pour f continue T-périodique.

— **Fermé dans un compact** : $\{y \in F \mid \|a-y\| \leq d(a,F)+1\}$ est compact si F est de dimension finie.

Inégalités qui identifient l'extremum.

— Moyennes : pour $\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0$,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

— **Jensen** pour φ concave : $\frac{1}{n}\sum \varphi(p_i) \leq \varphi\left(\frac{1}{n}\sum p_i\right)$.

— **Identité du parallélogramme** (norme euclidienne) : $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

Correction de l'exercice 1 – Équivalence des normes en dimension finie

a) Par inégalité triangulaire :

$$N(x) \leq \sum_i |x_i| N(e_i) \leq C\, N_\infty(x)$$

Alors $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq C\, N_\infty(x-y)$: N est C-lipschitzienne, donc continue.

b) Via les coordonnées, (E, N_∞) s'identifie à $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$; S y est fermée (image réciproque de $\{1\}$ par la norme, continue) et bornée, donc compacte par Bolzano-Weierstrass.

c) N continue sur le compact non vide S y atteint son minimum $m = N(x_0)$, et $m > 0$ car $x_0 \neq 0$. Pour $x \neq 0$, $\frac{x}{N_\infty(x)} \in S$ donne $N(x) \geq m\, N_\infty(x)$.

d) $N(x,y) \leq 3\max(|x|,|y|)$ avec égalité en $(1,1)$; et $N(x,y) \geq \max(|x|,|y|)$ avec égalité en $(1,0)$: meilleures constantes $m = 1$ et $C = 3$.

Réponse. $m\, N_\infty \leq N \leq C\, N_\infty$, m = minimum de N sur la sphère compacte ; ici $N_\infty \leq N \leq 3N_\infty$.

Correction de l'exercice 2 – Sous-espace de dimension finie et meilleure approximation

a) Soit (y_k) une suite de F convergeant vers $x \in E$. Elle est bornée, donc (Bolzano-Weierstrass dans F, de dimension finie) une sous-suite converge vers $y \in F$. Par unicité de la limite dans E, $x = y \in F$.

b) K est une partie de F, fermée (image réciproque par $y \mapsto \|a-y\|$, continue) et bornée par $\|a\| + \delta + 1$: compacte car F est de dimension finie. Elle est non vide (définition de l'infimum) et contient toutes les approximations à mieux que $\delta + 1$ près ; la fonction

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

continue $y \mapsto \|a - y\|$ y atteint son minimum, qui vaut δ.

c) f prend toutes les valeurs de $[0,1]$; pour une constante c :

$$\|f - c\|_\infty = \max(|c|, |1-c|) \geq \frac{1}{2}$$

avec égalité si et seulement si $c = \frac{1}{2}$. Donc $d(f,F) = \frac{1}{2}$, atteinte en la constante $\frac{1}{2}$.

Réponse. F fermé, distance atteinte sur un compact ; $d(x^2, \text{constantes}) = \frac{1}{2}$, en $c = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3 – Minimum du module d'un polynôme

a) Pour $|z| \geq 1$:

$$|P(z)| \geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{\sum_{k<n} |a_k|}{|z|} \right) \underset{|z| \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Il existe donc R tel que $|P(z)| > |P(0)|$ pour $|z| > R$. Sur le disque fermé $\overline{D}(0,R)$, compact, $|P|$ continue atteint son minimum en z_0 ; comme 0 est dans ce disque, ce minimum est $\leq |P(0)|$, donc inférieur à toutes les valeurs prises hors du disque : c'est un minimum global.

b) Avec $h = t\omega$: $P(z_0) + c\,t^k\omega^k = (1-t^k)P(z_0)$, donc pour $0 < t < 1$

$$|P(z_0 + t\omega)| \leq (1-t^k)|P(z_0)| + t^{k+1}|\omega|^{k+1}M$$

où M majore $|Q|$ sur $\overline{D}(0,|\omega|)$. Le membre de droite vaut $|P(z_0)| - t^k\left(|P(z_0)| - tM|\omega|^{k+1}\right) < |P(z_0)|$ pour t assez petit : contradiction avec la minimalité.

c) Donc $P(z_0) = 0$: tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ a une racine.

Réponse. Coercivité + compacité du disque : minimum atteint ; s'il était non nul on pourrait le diminuer, donc P a une racine.

Correction de l'exercice 4 – Applications propres

a) $f^{-1}(K)$ est fermé (continuité de f). Si $K \subset \overline{B}(0,M)$, il existe R tel que $\|x\| > R \Rightarrow \|f(x)\| > M$; donc $f^{-1}(K) \subset \overline{B}(0,R)$ est borné, compact en dimension finie.

b) Sinon, il existe M et (x_k) avec $\|x_k\| \to +\infty$ et $\|f(x_k)\| \leq M$. Alors tous les x_k sont dans $f^{-1}(\overline{B}(0,M))$, compact donc borné : contradiction.

c) $f^{-1}(\{0\})$ est la réunion des deux droites $y = \pm x$, non bornée : f n'est pas propre. Pour g, l'inégalité $3|xy| \leq \frac{y^2}{2} + \frac{9}{2}x^2$ donne

$$g(x,y) \geq x^4 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{y^2}{2} \underset{\|(x,y)\| \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$$

(si $|x|$ est grand, x^4 l'emporte ; sinon y^2 l'emporte) : g est propre.

Réponse. Propre $\Leftrightarrow \|f(x)\| \to +\infty$; $x^2 - y^2$ non propre, $x^4 + y^2 - 3xy$ propre.

Correction de l'exercice 5 – Puissances bornées et valeurs propres de module un

a) Si $Ax = \lambda x$ avec $x \neq 0$, alors $A^k x = \lambda^k x$, donc $|\lambda|^k \|x\| \leq M\|x\|$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Avec $k \to +\infty$: $|\lambda| \leq 1$; avec $k \to -\infty$: $|\lambda| \geq 1$.

b) Par récurrence (ou binôme, λI et $N = J - \lambda I$ commutent et $N^2 = 0$) :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

Si $|\lambda| = 1$, le coefficient $(1,2)$ a pour module $k \to +\infty$.

c) Si A n'était pas diagonalisable, elle aurait une valeur propre double λ et serait semblable à J : $A = PJP^{-1}$. Alors $J^k = P^{-1}A^kP$ serait bornée (le produit matriciel est continu, donc borné sur les bornés), ce qui contredit b).

d) $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots)$: D^k est de norme ≤ 1 pour toute norme d'algèbre usuelle, donc $\{A^k\}$ est bornée et son adhérence est fermée bornée en dimension finie, donc compacte.

Réponse. Spectre dans U ; un bloc de Jordan donne des puissances non bornées ; puissances bornées $\Leftrightarrow$ diagonalisable à spectre unitaire ($n = 2$).

Correction de l'exercice 6 – Entropie maximale

a) Δ est fermé (intersection d'images réciproques de fermés par des formes linéaires continues) et borné ($\Delta \subset [0,1]^n$) : compact. $t \ln t \to 0$ en 0^+ (croissances comparées), donc φ est continue en 0.

b) $H = \sum \varphi(p_i)$ est continue sur le compact non vide Δ : bornes atteintes.

c) $\varphi''(t) = -\frac{1}{t} < 0$ sur $]0,1]$: φ concave. Par Jensen :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(p_i) \leq \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right) = \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln n}{n}$$

donc $H(p) \leq \ln n$, avec égalité pour $p = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

d) $\varphi \geq 0$ sur $[0,1]$, donc $H \geq 0$; $H(p) = 0$ impose $\varphi(p_i) = 0$ pour tout i, soit $p_i \in \{0,1\}$: le minimum 0 est atteint exactement aux n lois certaines $(0, \dots, 1, \dots, 0)$.

Réponse. $0 \leq H \leq \ln n$; maximum pour la loi uniforme, minimum pour les lois certaines.

Correction de l'exercice 7 – Norme subordonnée atteinte

a) Par homogénéité, le sup est celui de $x \mapsto \|Ax\|_\infty$ sur la sphère $S = \{\|x\|_\infty = 1\}$, compacte (fermée bornée en dimension finie). Cette fonction est continue ($x \mapsto Ax$ linéaire en dimension finie) : le sup est atteint.

b) Pour tout i :

$$|(Ax)_i| \leq \sum_j |a_{ij}||x_j| \leq \left(\max_i \sum_j |a_{ij}|\right)\|x\|_\infty$$

Soit i_0 une ligne réalisant le max et $x_j = 1$ si $a_{i_0 j} \geq 0$, $x_j = -1$ sinon : $\|x\|_\infty = 1$ et $(Ax)_{i_0} = \sum_j |a_{i_0 j}|$, d'où l'égalité.

c) Sommes des lignes : $1 + 2 = 3$ et $3 + 1 = 4$, donc $|||A||| = 4$, atteinte en $x = (1,1)$: $Ax = (-1, 4)$ et $\|Ax\|_\infty = 4$.

Réponse. Sup atteint sur la sphère compacte ; norme = plus grande somme de ligne en valeur absolue ; ici 4.

Correction de l'exercice 8 – Déterminant maximal sur une boule

a) B est une boule fermée en dimension finie, donc compacte ; det est polynomiale en les coefficients, donc continue.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $A^{\mathsf{T}}A$ est symétrique positive : $\mu_i \geq 0$, et par l'inégalité des moyennes

$$(\det A)^2 = \det(A^{\mathsf{T}}A) = \prod_i \mu_i \leq \left(\frac{1}{n}\sum_i \mu_i\right)^n = \left(\frac{\operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}A)}{n}\right)^n$$

Sur B, le membre de droite est ≤ 1, donc $\det A \leq 1$, et $\det I_n = 1$ avec $I_n \in B$: $\max_B \det = 1$.

c) Égalité $\det A = 1$: il faut $\operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}A) = n$ et égalité dans l'inégalité des moyennes, donc $\mu_1 = \ldots = \mu_n = 1$. $A^{\mathsf{T}}A$ étant diagonalisable (théorème spectral) de seule valeur propre 1, $A^{\mathsf{T}}A = I_n$: $A \in O(n)$ et $\det A = 1$, soit $A \in SO(n)$. Réciproquement toute matrice de $SO(n)$ convient.

Réponse. $\max_B \det = 1$, atteint exactement sur $SO(n)$ (inégalité des moyennes sur le spectre de $A^{\mathsf{T}}A$).

Correction de l'exercice 9 – Fonctions continues périodiques

a) Par périodicité, $f(\mathbb{R}) = f([0,T])$, image continue d'un segment : compacte, donc bornée, et ses bornes sont des valeurs de f.

b) Soit $\varepsilon > 0$; Heine donne $\delta \in]0,T]$ tel que $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$ pour $u, v \in [-T, 2T]$, $|u - v| \leq \delta$. Si $|x - y| \leq \delta$, on choisit $k \in \mathbb{Z}$ avec $x' = x - kT \in [0,T]$; alors $y' = y - kT \in [-T, 2T]$, et

$$|f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')| \leq \varepsilon$$

c) f est 2π-périodique et continue ($2 + \sin x \geq 1$). On a

$$f'(x) = \frac{-\sin x(2 + \sin x) - \cos^2 x}{(2 + \sin x)^2} = -\frac{2\sin x + 1}{(2 + \sin x)^2}$$

nul pour $\sin x = -\frac{1}{2}$. En $x = -\frac{\pi}{6}$: $f = \frac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; en $x = \frac{7\pi}{6}$: $f = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Les extremums, atteints d'après a), sont parmi ces points critiques : $\max f = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\min f = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Réponse. Bornée, bornes atteintes, uniformément continue ; ici max $= \frac{\sqrt{3}}{3}$, min $= -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Correction de l'exercice 10 – Somme d'un compact et d'un fermé

a) $K + L$ est l'image du compact $K \times L$ par l'addition $(a,b) \mapsto a + b$, continue.

b) Soit $z_k = a_k + b_k \to z$ avec $a_k \in K$, $b_k \in F$. On extrait $a_{\varphi(k)} \to a \in K$; alors

$$b_{\varphi(k)} = z_{\varphi(k)} - a_{\varphi(k)} \longrightarrow z - a$$

et F étant fermé, $z - a \in F$: $z = a + (z - a) \in K + F$.

c) G est une droite, fermée. F est fermé : si $(x_k, y_k) \in F$ tend vers (x,y), alors $xy = 1$ par continuité, donc $x \neq 0$, et $x \geq 0$ comme limite de $x_k > 0$, d'où $x > 0$. Mais $F + G = \{(x + t, \frac{1}{x})\} = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$: la suite $\left(0, \frac{1}{k}\right)$ y est et converge vers $(0,0)$, qui n'y est pas.

Réponse. Compact + compact : compact ; compact + fermé : fermé ; fermé + fermé : pas forcément fermé.

Correction de l'exercice 11 – Continuité uniforme et limites à l'infini

a) Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tel que $|f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \geq A$ et $|f(x) - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \leq -A$. Heine sur $[-A-1, A+1]$ fournit $\delta \in]0,1]$. Si $|x - y| \leq \delta$: soit x et y sont dans $[-A-1, A+1]$, soit ils sont tous deux $\geq A$ ou tous deux $\leq -A$, et alors par exemple

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-\ell| + |\ell - f(y)| \le \varepsilon$$

b) Non : $x \mapsto x$ est uniformément continue sans limite finie.

c) Soit $f(x_0) > \ell$ et A tel que $f < f(x_0)$ hors de $[-A, A]$ (avec $A \ge |x_0|$). Le maximum de f sur le segment $[-A, A]$ est $\ge f(x_0)$, donc global. Pour $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$: $f'(x) = (1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$, d'où $\max f = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$.

Réponse. Uniformément continue (Heine sur un segment + limites) ; réciproque fausse ; $\max x\,\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$.

Correction de l'exercice 12 – Maximum d'une forme linéaire sur une courbe

a) C est fermé (image réciproque de $\{1\}$ par une fonction polynomiale) et borné ($|x|, |y| \le 1$) en dimension finie : compact.

b) h est continue sur le compact non vide C.

c) Par convexité de $t \mapsto t^4$:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^4 \le \frac{x^4+y^4}{2} = \frac{1}{2}$$

donc $|x+y| \le 2 \times 2^{-1/4} = 2^{3/4} \approx 1{,}682$. Égalité pour $x = y = 2^{-1/4}$, point de C car $2 \times \frac{1}{2} = 1$. Donc $\max_C h = 2^{3/4}$ et, par symétrie, $\min_C h = -2^{3/4}$.

d) Sur le cercle, $x + y = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2} \approx 1{,}414$: la courbe C, plus « carrée », s'étend plus loin dans la direction $(1, 1)$.

Réponse. C compact ; $\max(x+y) = 2^{3/4}$ en $(2^{-1/4}, 2^{-1/4})$, contre $\sqrt{2}$ sur le cercle.

Correction de l'exercice 13 – Projection d'un fermé le long d'un compact

a) Soit $x_k \in \pi(F)$, $x_k \to x$, et $y_k \in K$ avec $(x_k, y_k) \in F$. On extrait $y_{\varphi(k)} \to y \in K$; alors $(x_{\varphi(k)}, y_{\varphi(k)}) \to (x, y)$ et, F étant fermé, $(x, y) \in F$: $x \in \pi(F)$.

b) La projection est $\mathbb{R}^*$, non fermée : $\frac{1}{k} \to 0$. Ici la seconde coordonnée $y = \frac{1}{x}$ n'est pas astreinte à un compact : c'est elle qui « s'échappe à l'infini ».

c) On identifie $\mathbb{R}_n[X]$ à $\mathbb{R}^{n+1}$. L'application $(P, t) \mapsto P(t)$ est continue (polynomiale en les coefficients et en t), donc

$$F = \{(P, t) \in \mathbb{R}_n[X] \times [0,1] \mid P(t) = 0\}$$

est fermé, et l'ensemble cherché est $\pi(F)$ avec $K = [0, 1]$ compact : il est fermé par a).

Réponse. Projection le long d'un compact : fermée ; contre-exemple $xy = 1$; polynômes à racine dans $[0, 1]$: fermé.

Correction de l'exercice 14 – Boule fermée minimale contenant un compact

a) $x \mapsto \|x - c\|$ est continue sur le compact K. Pour $x \in K$:
$\|x - c\| \le \|x - c'\| + \|c - c'\| \le r(c') + \|c - c'\|$, d'où $r(c) \le r(c') + \|c - c'\|$, et symétriquement.

b) Pour $x_0 \in K$: $r(c) \ge \|c\| - \|x_0\|$. Si $\|c\| > r(0) + \|x_0\|$, alors $r(c) > r(0)$. Le minimum de r (continue) sur la boule fermée $\overline{B}(0, r(0) + \|x_0\|)$, compacte et contenant 0, est donc un minimum global.

c) Si c_1, c_2 réalisent ρ et $m = \frac{c_1 + c_2}{2}$, pour tout $x \in K$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\|x-m\|^2 = \frac{\|x-c_1\|^2 + \|x-c_2\|^2}{2} - \frac{\|c_1-c_2\|^2}{4} \le \rho^2 - \frac{\|c_1-c_2\|^2}{4}$$

Donc $\rho^2 \le r(m)^2 \le \rho^2 - \frac{\|c_1-c_2\|^2}{4}$, et $c_1 = c_2$.

d) Avec $B=(4,0)$, $C=(0,3)$: $\max(\|c-B\|, \|c-C\|) \ge \frac{\|B-C\|}{2} = \frac{5}{2}$ pour tout c. Le milieu $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ de l'hypoténuse est à distance $\frac{5}{2}$ des trois sommets (triangle rectangle en l'origine) : $\rho = \frac{5}{2}$, centre $\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

Réponse. Boule minimale : existe (coercivité) et unique (parallélogramme) ; ici centre $\left(2, \frac{3}{2}\right)$, rayon $\frac{5}{2}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : polynômes dont les racines sont dans le disque unité

a) Si $P = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$ avec $|z_i| \le 1$, alors $a_{n-k} = (-1)^k \sigma_k(z_1, \dots, z_n)$, somme de $\binom{n}{k}$ produits de modules ≤ 1 :

$$|a_{n-k}| \le \binom{n}{k}$$

b) Soit $P_j \in E_n$ de racines $z_i^{(j)}$, avec $P_j \to P$ (coefficient par coefficient). Pour $|z| > 1$: $|z - z_i^{(j)}| \ge |z| - 1$, donc $|P_j(z)| \ge (|z|-1)^n$. Or $P_j(z) \to P(z)$, d'où $|P(z)| \ge (|z|-1)^n > 0$: P, unitaire de degré n, n'a aucune racine hors de $\overline{D}$, et $P \in E_n$. Fermé et borné en dimension finie : E_n est compact.

c) $P \mapsto P(2)$ est continue (affine en les coefficients), donc $|P(2)|$ atteint ses bornes. Pour $|z_i| \le 1$: $1 \le |2 - z_i| \le 3$, donc $1 \le |P(2)| \le 3^n$, avec égalités pour $(X-1)^n$ et $(X+1)^n$.

d) Non : $\left(X - 1 + \frac{1}{j}\right)^n$ a sa racine dans le disque ouvert et converge vers $(X-1)^n$, dont la racine 1 est sur le bord. L'ensemble n'est pas fermé, donc pas compact.

Réponse. E_n compact ; $1 \le |P(2)| \le 3^n$, bornes atteintes en $(X-1)^n$ et $(X+1)^n$; version disque ouvert : non fermée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).