Plaquette 2 – Reconnaître un compact en dimension finie : exemples et contre-exemples

Compacité — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Critères.

— Dimension finie : K compact $\Leftrightarrow$ K fermé et borné.

— Image continue d'un compact : compacte ; produit fini et intersection de compacts : compacts ; réunion **finie** de compacts : compacte.

— Graphe d'une fonction continue sur un compact : compact.

— **Matrices** : $O(n)$, $SO(n)$ et les matrices stochastiques sont compacts ; par exemple

$$O(n) = \{A \mid A^{\mathsf{T}}A = I\} \subset \{\|A\|_F = \sqrt{n}\}$$

— **Non-compacité** : une suite non bornée (ex. $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$), ou une suite convergeant hors de la partie.

Correction de l'exercice 1 – Parties compactes du plan

a) A est fermé (image réciproque de $]-\infty, 1]$) et borné ($|x|, |y| \leq 1$) : compact. B contient $(0, n)$ pour tout n (car $-n^2 \leq 1$) : non borné, non compact.

b) C n'est pas fermé : $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in C$ tend vers $(0, 0) \notin C$.

c) D est l'image du compact $[0, 2\pi]$ par $t \mapsto (t, \sin t)$ continue : compact. E contient $(2k\pi, 0)$, non borné :

$$\|(2k\pi, 0)\| \to +\infty$$

Réponse. A et D compacts ; B et E non bornés ; C non fermé.

Correction de l'exercice 2 – Le groupe orthogonal est compact

a) $O(n) = \varphi^{-1}(\{I\})$ avec $\varphi(A) = A^{\mathsf{T}}A$ continue.

b) Les colonnes sont unitaires, donc $|a_{ij}| \leq 1$, et

$$\|A\|_F^2 = \operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}A) = n$$

c) Fermé borné en dimension finie : compact. $SO(n) = O(n) \cap \det^{-1}(\{1\})$ est fermé dans un compact.

Réponse. $O(n) = \varphi^{-1}(\{I\})$ fermé, $\|A\|_F = \sqrt{n}$: compact ; $SO(n)$ aussi.

Correction de l'exercice 3 – Des ensembles de matrices non compacts

a) $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $A_k^2 = \begin{pmatrix} 1 & k-k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ et n'est pas bornée. (L'ensemble est fermé mais pas borné.)

b) kE_{12} est nilpotente pour tout k : non borné.

c) GL_2 n'est pas fermé ($\frac{1}{k}I \to 0$). SL_2 est fermé mais non borné :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \in SL_2, \qquad \|\cdot\| \to +\infty$$

Réponse. Toutes non bornées (ou non fermées pour GL_2) : $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, kE_{12}, $\mathrm{diag}(k, \frac{1}{k})$.

Correction de l'exercice 4 – Matrices stochastiques

a) Fermé (inégalités larges et égalités sur des formes linéaires continues), borné ($0 \leq p_{ij} \leq 1$), donc compact ; convexe car les conditions sont stables par combinaison convexe.

b) $P^2 \geq 0$ et $P^2\mathbf{1} = P(P\mathbf{1}) = P\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

c) (P^k) est une suite du compact P_n : par Bolzano-Weierstrass, une sous-suite converge, et la limite est dans P_n (fermé) :

$$P^{\varphi(k)} \to L \in P_n$$

Réponse. P_n compact convexe, stable par produit ; (P^k) a une valeur d'adhérence stochastique.

Correction de l'exercice 5 – Graphe d'une fonction continue

a) G est l'image du compact $[a, b]$ par $x \mapsto (x, f(x))$ continue.

b) G compact est borné : $(f(x_n))$ est bornée. Si $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)})) \to (x, y)$, alors $(x, y) \in G$ (fermé), donc $y = f(x)$. La suite bornée $(f(x_n))$ a pour seule valeur d'adhérence $f(x)$: elle converge vers $f(x)$.

c) Le graphe est fermé : si $(x_n, f(x_n)) \to (x, y)$ avec $x > 0$, continuité de $\frac{1}{x}$; si $x = 0$, $\frac{1}{x_n} \to +\infty$ ne peut converger, sauf si $x_n = 0$ à partir d'un rang. Mais il n'est pas borné :

$$\left(\frac{1}{n}, n\right) \in G$$

Réponse. Graphe compact $\Leftrightarrow f$ continue (sur un segment) ; le graphe de $\frac{1}{x}$ prolongée est fermé non borné.

Correction de l'exercice 6 – Image réciproque et image directe

a) $x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(x + y)^2 \geq 0$.

b) K est fermé (image réciproque d'un fermé) et contenu dans la boule $\{x^2 + y^2 \leq 2\}$: compact.

c) Non : $g^{-1}([0, 1]) = [0, 1] \times \mathbb{R}$ n'est pas borné. Il faut une hypothèse de coercivité comme en a) :

$$f(x, y) \underset{\|(x,y)\| \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Réponse. $f \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$: $f^{-1}([0, 1])$ compact ; $g(x, y) = x$ donne une bande non bornée.

Correction de l'exercice 7 – Réunions et intersections

a) Si $x_k \in K_1 \cup \ldots \cup K_p$, l'un des K_i contient une infinité de termes, d'où une sous-suite dans K_i, puis une sous-suite convergente dans K_i.

b) $\bigcap K_i$ est fermé (intersection de fermés) et inclus dans un compact K_{i_0} : fermé dans un compact.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Non : $\bigcup_n [n, n+1] = [0, +\infty[$ n'est pas borné, et

$$\bigcup_{n \geq 1} \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \right\rangle$$

— n'est pas fermé (0 manque). En revanche $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \cup \{0\}$ est compact.

Réponse. Réunion finie et intersection quelconque : compactes ; réunion dénombrable : non en général.

Correction de l'exercice 8 – Compacité d'un ensemble de polynômes

a) Séparation : un polynôme de degré ≤ 2 nul en trois points est nul.

b) K est la boule unité fermée de N, fermée et bornée en dimension finie :

$$K = B_N(0, 1) \text{ compacte}$$

c) $P_k = kX(X-1)$ vérifie $P_k(0) = P_k(1) = 0$, mais $P_k(2) = 2k$: l'ensemble n'est pas borné (pour la norme N, toutes les normes étant équivalentes).

Réponse. K = boule unité de N : compact ; avec deux conditions, $kX(X-1)$ montre que ce n'est pas borné.

Correction de l'exercice 9 – Suite et sa limite

a) Soit (v_k) une suite de K. Si elle prend une infinité de fois une même valeur, sous-suite constante. Sinon, elle prend une infinité de valeurs u_{n_k} avec $n_k \to +\infty$ (quitte à extraire), et $u_{n_k} \to \ell \in K$.

b) $\left\langle \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \right\rangle$ n'est pas fermé.

c) $u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n} \right) \to (0, 0)$:

$$\{u_n\} \cup \{(0,0)\} \text{ est compact}$$

Réponse. $\{u_n\} \cup \{\ell\}$ compact ; sans la limite, pas fermé en général.

Correction de l'exercice 10 – Matrices à spectre unitaire

a) Fermé ($\varphi^{-1}(\{I\})$) et borné (colonnes unitaires) dans un espace de dimension finie.

b) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour seule valeur propre $1 \in \mathrm{U}$ et n'est pas bornée.

c) Oui : si $A_k \to A$ avec $\mathrm{Sp} A_k \subset \mathrm{U}$, les coefficients de χ_{A_k} convergent vers ceux de χ_A, et (continuité des racines en taille 2, formule explicite) les valeurs propres de A sont limites de valeurs propres de module 1 :

$$|\lambda| = 1$$

Réponse. U compact ; R fermé non borné.

Correction de l'exercice 11 – Produit de compacts

a) Pour (x_n, y_n) : extraire $x_{\varphi(n)} \to x$, puis de $(y_{\varphi(n)})$ une sous-suite $y_{\varphi(\psi(n))} \to y$; alors (x, y) est limite d'une sous-suite.

b) $\mathrm{T} = \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$, produit de deux cercles compacts (ou image de $[0, 2\pi]^2$ par une application continue).

c) $f = \cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$, continue sur un compact :

$$\max f = 1 \ (a = b), \qquad \min f = -1 \ (a - b = \pi)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Produit de compacts : compact ; T compact ; $f = \cos(a-b) \in [-1,1]$.

Correction de l'exercice 12 – Compacts de R et bornes

a) K est borné : $\sup K$ existe et est limite d'une suite de K ; K fermé, donc $\sup K \in K$. Idem pour l'inf.

b) Non fermé dans $\mathbb{R}$: des rationnels de $[0,1]$ tendent vers $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$.

c) K est borné ($\subset [0,2]$) et fermé : c'est l'adhérence de $A = \left\langle \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right\rangle$ (exercice classique : $\overline{A} = A \cup \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \cup \{0\}$). Son maximum est

$$\max K = 1 + 1 = 2$$

Réponse. Bornes atteintes ; $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ non compact ; $\max K = 2$.

Correction de l'exercice 13 – Image d'un compact par une application non continue

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$, $f(0) = 0$: $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$.

b) $g(x) = x$ pour $x < 1$ et $g(1) = 0$: $g([0,1]) = [0,1[$, non fermé.

c) L'image d'un compact n'est compacte que pour une application **continue** :

$$f \text{ continue}, K \text{ compact} \Longrightarrow f(K) \text{ compact}$$

— sans continuité, image non bornée ou non fermée.

Réponse. $\frac{1}{x}$ prolongée : image non bornée ; g : image $[0,1[$ non fermée ; la continuité est indispensable.

Correction de l'exercice 14 – Compacité des matrices de projection orthogonale

a) Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est symétrique, et le rang d'un projecteur est sa trace.

b) Conditions polynomiales et linéaires continues : fermé. Borné car

$$\|P\|_F^2 = \operatorname{tr}(P^{\mathsf{T}}P) = \operatorname{tr} P = r$$

c) Compact. Pour $n = 2$, $r = 1$: $P = uu^{\mathsf{T}}$ avec $u = (\cos\theta, \sin\theta)$, soit $P = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$: un cercle (image de $[0,\pi]$, avec identification des extrémités).

Réponse. P_r fermé, $\|P\|_F = \sqrt{r}$: compact ; P_1 ($n = 2$) est un cercle.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : un ensemble défini par des inégalités

a) Intersection des fermés $\{z - x^2 - y^2 \geq 0\}$ et $\{2 - x^2 - y^2 - z \geq 0\}$.

b) $0 \leq x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$ donne $x^2 + y^2 \leq 1$ et $0 \leq z \leq 2$: $K \subset B_f(0, \sqrt{5})$.

c) Fermé borné en dimension finie : compact ; f continue atteint son maximum.

d) À (x,y) fixé, z maximal vaut $2 - x^2 - y^2$, d'où $f \leq x + y + 2 - x^2 - y^2 = 2 + \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$. Le maximum est atteint en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (on vérifie $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$) :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\max_K f = \frac{5}{2}$$

Réponse. K compact ; $\max f = \frac{5}{2}$ en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).