Plaquette 3 – Compacité et optimisation : existence d'extremums

Compacité — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

La compacité est l'outil d'**existence** par excellence : une fonction continue à valeurs réelles sur un compact non vide atteint ses bornes. Quand le domaine n'est pas compact (tout $\mathbb{R}^n$, un fermé non borné), on se ramène à un compact par **coercivité** : si $f \to +\infty$ à l'infini, le minimum est atteint dans une boule convenable. Une fois l'existence acquise, on **calcule** l'extremum par d'autres moyens (points critiques, inégalités classiques, symétrie). Les mêmes idées donnent l'existence de meilleures approximations, de vecteurs propres de matrices symétriques, du diamètre d'un compact.

Exercice 1 – Distance d'un point à une parabole

Soit $P = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $A = (0, 2)$.

a) Montrer que P est fermé et que $d(A, P)$ est atteinte.

b) Calculer $d(A, P)$ et les points les plus proches.

c) Pourquoi le point le plus proche n'est-il pas unique ici ?

Exercice 2 – Maximum d'un produit sur la sphère

Soit $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et $f(x, y, z) = xyz$.

a) Justifier que f atteint son maximum sur S.

b) Avec l'inégalité arithmético-géométrique appliquée à x^2, y^2, z^2, montrer que $|xyz| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

c) Déterminer le maximum et les points où il est atteint.

Exercice 3 – Meilleure approximation uniforme affine

On cherche $\min_{a,b} \sup_{x \in [0,1]} |x^2 - ax - b|$.

a) Justifier l'existence du minimum (distance de x^2 au sous-espace de dimension finie $\mathbb{R}_1[X]$ pour $\|\cdot\|_\infty$).

b) Vérifier que pour $(a, b) = \left(1, -\frac{1}{8}\right)$, l'erreur vaut $\frac{1}{8}$ et est atteinte avec signes alternés en 0, $\frac{1}{2}$, 1.

c) Montrer qu'aucune droite ne fait mieux (si $\|x^2 - p\|_\infty < \frac{1}{8}$, étudier le signe de $p - (x - \frac{1}{8})$ en 0, $\frac{1}{2}$, 1).

Exercice 4 – Maximum d'une fonction tendant vers zéro à l'infini

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue avec $f(x) \to 0$ en $\pm\infty$.

a) Montrer que si f prend une valeur strictement positive, elle atteint son maximum.

b) Application : $f(x) = xe^{-x^2}$. Calculer son maximum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Une fonction continue positive tendant vers 0 à l'infini atteint-elle toujours son minimum ?

Exercice 5 – Minoration uniforme d'une fonction positive

a) Montrer que si f est continue et strictement positive sur un compact K, il existe $m > 0$ avec $f \geq m$ sur K.

b) Application : soit $P(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Montrer qu'il existe $m > 0$ avec $P(x, y) \geq m(x^2 + y^2)$ (étudier P sur le cercle unité) et calculer le meilleur m.

c) Le résultat a) est-il vrai sur $]0, 1]$?

Exercice 6 – Existence d'un vecteur propre par compacité

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $q(x) = x^{\mathsf{T}} S x$ sur la sphère unité Σ.

a) Justifier que q atteint son maximum en un point $u \in \Sigma$.

b) Pour $h \perp u$ et t réel, on pose $x_t = \dfrac{u + th}{\sqrt{1 + t^2 \|h\|^2}}$. En écrivant $q(x_t) \leq q(u)$ au voisinage de $t = 0$, montrer que $\langle Su, h \rangle = 0$.

c) En déduire que Su est colinéaire à u : S admet une valeur propre réelle.

Exercice 7 – Diamètre d'un compact

Le diamètre d'une partie bornée A est $\delta(A) = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|$.

a) Montrer que si K est compact, le diamètre est atteint.

b) Montrer que pour un triangle plein T (euclidien), le diamètre est la longueur du plus grand côté (utiliser la convexité de $y \mapsto \|x - y\|$).

c) Calculer le diamètre du triangle de sommets $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 4)$.

Exercice 8 – Une fonction définie par un maximum

Soit f continue sur $[0, 1]^2$ et $g(x) = \max_{y \in [0,1]} f(x, y)$.

a) Justifier que g est bien définie.

b) Montrer que g est continue (utiliser la continuité uniforme de f sur le compact $[0, 1]^2$).

c) Application : $f(x, y) = xy - y^2$. Calculer g.

Exercice 9 – Bijection continue d'un compact

Soit $f : K \to L$ continue et bijective, avec K compact.

a) Montrer que l'image par f de tout fermé de K est fermée.

b) En déduire que f^{-1} est continue.

c) Montrer que le résultat est faux sans compacité : $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ de $[0, 2\pi[$ sur le cercle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Maximum d'une trace sur le groupe orthogonal

Soit $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ avec $d_i \geq 0$, et $\varphi(Q) = \mathrm{tr}(DQ)$ sur $O(n)$.

a) Justifier que φ atteint son maximum.
b) Montrer que $|q_{ii}| \leq 1$ pour $Q \in O(n)$ et en déduire $\varphi(Q) \leq \mathrm{tr}D$.
c) Déterminer le maximum et un point où il est atteint.

Exercice 11 – Localement lipschitzienne sur un compact

Soit $f : K \to \mathbb{R}$ avec K compact, telle que tout point a a un voisinage $B(a, r_a)$ sur lequel f est k_a-lipschitzienne.

a) Montrer que f est continue et bornée sur K.
b) On suppose f non lipschitzienne : il existe x_n, y_n avec $|f(x_n) - f(y_n)| > n\|x_n - y_n\|$. Montrer que $\|x_n - y_n\| \to 0$.
c) Extraire $x_{\varphi(n)} \to a$ et obtenir une contradiction.

Exercice 12 – Triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle

On considère les triangles dont les sommets sont sur le cercle unité.

a) Montrer que l'aire $A(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ (sommets $e^{i\theta_k}$) est une fonction continue sur le compact $[0, 2\pi]^3$, et qu'elle atteint son maximum.
b) En écrivant l'aire à l'aide des angles au centre α, β, γ ($\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$) : $A = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$, montrer par concavité de sin sur $[0, \pi]$ que $A \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.
c) Identifier le triangle optimal.

Exercice 13 – Élément de norme minimale d'un fermé

Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ (norme quelconque).

a) Montrer que F contient un élément de norme minimale.
b) Application : $F = \{(x, y) \mid xy \geq 1, x > 0\}$; déterminer le minimum de $\|\cdot\|_2$ sur F.
c) Même question pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 14 – Polynôme strictement positif sur un segment

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ strictement positif sur $[0, 1]$.

a) Montrer qu'il existe $m > 0$ avec $P \geq m$ sur $[0, 1]$.
b) En déduire que $\frac{1}{P}$ est bornée sur $[0, 1]$ et que $\int_0^1 \frac{dx}{P(x)} \leq \frac{1}{m}$.
c) Application : $P = X^2 - X + 1$; calculer m et majorer l'intégrale.

Exercice 15 – Synthèse : point minimisant une somme de carrés de distances

Soit $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 2)$ et $f(P) = PA^2 + PB^2 + PC^2$.

a) Montrer que f est coercive et en déduire qu'elle atteint son minimum.
b) Montrer que $f(P) = 3PG^2 + f(G)$ où G est le centre de gravité.
c) En déduire le minimum et le point où il est atteint.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Le point minimisant la somme des distances $PA + PB + PC$ existe-t-il ? Est-ce aussi G ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).