Plaquette 4 – Compacité, suites et uniformité

Compacité — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

La compacité transforme des propriétés **ponctuelles** en propriétés **uniformes** : continuité en continuité uniforme (Heine), convergence simple monotone en convergence uniforme (Dini), contraction faible en convergence des itérés. La technique est toujours la même : on raisonne **par l'absurde**, on construit une suite de « mauvais points », on en extrait une sous-suite convergente dans le compact, et la continuité au point limite produit la contradiction. Les ensembles de valeurs d'adhérence et les applications qui conservent les distances relèvent du même schéma.

Exercice 1 – Théorème de Dini

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues sur $[a,b]$, convergeant simplement vers f continue. On pose $g_n = f - f_n \geq 0$.

a) Supposons $\|g_n\|_\infty \geq \varepsilon$ pour tout n : il existe x_n avec $g_n(x_n) \geq \varepsilon$. Extraire $x_{\varphi(n)} \to a$.

b) Montrer que $g_p(x_{\varphi(n)}) \geq \varepsilon$ pour $\varphi(n) \geq p$ (décroissance de (g_n)), puis que $g_p(a) \geq \varepsilon$ pour tout p.

c) Conclure à la convergence uniforme, et l'appliquer à $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ sur $[0,1]$.

Exercice 2 – Continuité d'une intégrale à paramètre

Soit f continue sur $[a,b] \times [c,d]$ et $F(x) = \int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que f est uniformément continue.

b) En déduire que $|F(x) - F(x')| \leq (d-c)\varepsilon$ dès que $|x - x'| \leq \delta$.

c) Application : $F(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[0,1]$; calculer $F(0)$ et majorer $|F(x) - F(0)|$.

Exercice 3 – Une isométrie d'un compact dans lui-même est surjective

Soit K compact et $f : K \to K$ avec $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

a) Supposons $a \in K \setminus f(K)$. Montrer que $\delta = d(a, f(K)) > 0$ ($f(K)$ est compact).

b) On pose $a_n = f^n(a)$. Montrer que $\|a_n - a_m\| \geq \delta$ pour $n \neq m$.

c) Conclure, et montrer que le résultat est faux sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4 – Valeurs d'adhérence d'une suite d'un compact

Soit (u_n) une suite d'un compact K et A l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

a) Montrer que A est non vide.

b) Montrer que A est fermé (donc compact).

c) Montrer que si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue sur K, alors $f(A) \subset A$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Limite d'une suite de puissances

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que la suite (A^k) soit bornée.

a) Montrer que (A^k) admet une valeur d'adhérence.

b) Montrer que si $A^k \to L$, alors $L^2 = L$ et $AL = L$.

c) Application : $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; et que dire de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 6 – Approximation uniforme par des fonctions affines par morceaux

Soit f continue sur $[0,1]$ et $\varepsilon > 0$.

a) Justifier l'existence de $\delta > 0$ tel que $|x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le \varepsilon$.

b) Soit $N \ge \frac{1}{\delta}$ et g la fonction affine par morceaux qui coïncide avec f aux points $\frac{k}{N}$. Montrer que $\|f-g\|_\infty \le 2\varepsilon$.

c) Application : $f(x) = \sqrt{x}$, $\varepsilon = 0{,}1$; proposer N.

Exercice 7 – Emboîtement et diamètre

Soit (K_n) une suite décroissante de compacts non vides de $\mathbb{R}^d$ avec $\delta(K_n) \to 0$.

a) Montrer que $\bigcap K_n$ est non vide.

b) Montrer que c'est un singleton.

c) Application : retrouver le théorème des segments emboîtés et l'appliquer à $K_n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \right]$ (admettre la monotonie des bornes).

Exercice 8 – Une suite récurrente sur un compact

Soit $f:[0,1] \to [0,1]$ continue et croissante, $u_0 \in [0,1]$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que (u_n) est monotone.

b) En déduire qu'elle converge vers un point fixe de f.

c) Application : $f(x) = \frac{x^2+1}{2}$ et $u_0 = 0$.

Exercice 9 – Fonction continue et uniformément continue sur un borné

Soit f continue sur $]0,1[$.

a) Montrer que si f se prolonge par continuité à $[0,1]$, elle est uniformément continue sur $]0,1[$.

b) Montrer la réciproque (utiliser le critère de Cauchy aux bornes).

c) Étudier $f(x) = x\ln x$ et $g(x) = \ln x$ sur $]0,1[$.

Exercice 10 – Distance et fonction distance sur un compact

Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ euclidien et $f(x) = d(x,K)$.

a) Montrer que pour tout x, il existe $p(x) \in K$ avec $\|x - p(x)\| = f(x)$.

b) Si K est convexe, montrer que $p(x)$ est unique (utiliser l'identité du parallélogramme).

c) Montrer que l'unicité tombe si K n'est pas convexe : K = cercle unité et $x = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Continuité uniforme d'une fonction de deux variables

Soit $f(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$.

a) Justifier que f est uniformément continue sur le disque unité fermé.

b) Montrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$ en majorant ses dérivées partielles.

c) En déduire qu'elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12 – Convergence uniforme sur tout compact

Soit $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $f_n \to \exp$ uniformément sur tout segment $[-A, A]$.

b) Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire, pour K compact de $\mathbb{R}$, la convergence uniforme sur K.

Exercice 13 – Application contractante faible et itérés

Soit K compact et $f : K \to K$ avec $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ pour $x \neq y$. On note ℓ son unique point fixe (existence par compacité).

a) Montrer que $u_n = \|x_n - \ell\|$ est décroissante, pour $x_{n+1} = f(x_n)$.

b) Soit $\lambda = \lim u_n$ et a une valeur d'adhérence de (x_n). Montrer que $\|a - \ell\| = \lambda = \|f(a) - \ell\|$.

c) En déduire $\lambda = 0$: les itérés convergent vers ℓ.

Exercice 14 – Le sinus itéré

Soit $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = \sin u_n$.

a) Montrer que $|\sin x - \sin y| < |x - y|$ pour $x \neq y$ dans $[0,1]$.

b) En déduire que $u_n \to 0$ (exercice précédent).

c) Montrer que sin n'est pas contractante (au sens de Banach) sur $[0,1]$, et que la convergence est lente : on admet $u_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

Exercice 15 – Synthèse : continuité d'une borne supérieure à paramètre

Soit $f(x,t) = \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t}$ et $M(x) = \max_{t \in [0,1]} f(x,t)$ pour $x \in [0,2]$.

a) Justifier que M est bien définie.

b) Montrer que M est continue sur $[0,2]$ (Heine).

c) Calculer $M(0)$ et montrer que $M(x) \leq \min(x, 1)$.

d) Montrer que M est croissante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).