Plaquette 1 – Parties compactes, Bolzano-Weierstrass et applications

Compacité — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On reconnaît un compact (fermé borné en dimension finie), on exploite **Bolzano-Weierstrass** pour extraire une sous-suite convergente, et on applique la compacité aux bornes atteintes, à Heine et aux distances.

Exercice 1 – Reconnaître un compact

Dans $\mathbb{R}^2$, les ensembles suivants sont-ils compacts ?

a) $A = \left\langle (x,y) \mid x^2 + y^2 = 1 \right\rangle$

b) $B = \{(x,y) \mid xy = 1\}$

c) $C = \{(x,y) \mid 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$

Exercice 2 – Bolzano-Weierstrass

Soit $u_n = (\cos n,\ \sin n)$. Montrer que (u_n) admet une sous-suite convergente.

Exercice 3 – Fermé dans un compact

Soit K compact et $F \subset K$ fermé. Montrer que F est compact.

Exercice 4 – Image continue

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$, et K le cercle unité. Déterminer $f(K)$.

Exercice 5 – Distance à un fermé

Calculer la distance du point $A(3,4)$ au cercle unité C, et montrer que l'infimum est atteint.

Exercice 6 – 1-lipschitzianité de la distance

Montrer que $x \mapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne, pour A non vide quelconque.

Exercice 7 – Théorème de Heine

Soit $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0\,;1]$. Est-elle uniformément continue ?

Exercice 8 – Compacts et suites

Soit K compact et (x_n) une suite de K admettant **une seule** valeur d'adhérence ℓ. Montrer que $x_n \to \ell$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Sphère unité et normes

Pourquoi la compacité de la sphère unité est-elle essentielle dans la preuve de l'équivalence des normes en dimension finie ?

Exercice 10 – Compacité et produit

Soient $K_1 = [0\,;1]$ et $K_2 = [2\,;3]$. Montrer que $K_1 \times K_2$ est compact et déterminer $\max_{(x,y)\in K_1\times K_2}\left(xy - x^2\right)$.

Exercice 11 – Contre-exemple en dimension infinie

Dans $E = C([0\,;1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, montrer que la boule unité fermée n'est pas compacte.

Exercice 12 – Fonction coercive et minimum

Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ sur $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que $f(x,y) \geq \frac{r^4}{2} - 2r^2$ avec $r = \|(x,y)\|_2$, et en déduire que $f(x,y) \to +\infty$ quand $r \to +\infty$.

b) En déduire que f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^2$.

c) Déterminer les points critiques et la valeur du minimum.

Exercice 13 – Distance entre un compact et un fermé

Soit K compact et F fermé disjoints dans un evn de dimension finie.

a) Montrer que $x \mapsto d(x,F)$ est continue et strictement positive sur K.

b) En déduire que $d(K,F) = \inf_{x\in K} d(x,F) > 0$.

c) Montrer que le résultat est faux pour deux fermés disjoints : $F_1 = \{(x,0)\}$ et $F_2 = \{(x,y) \mid xy = 1\}$.

Exercice 14 – Intersection décroissante de compacts

Soit (K_n) une suite décroissante ($K_{n+1} \subset K_n$) de compacts non vides d'un evn.

a) En choisissant $x_n \in K_n$, montrer que (x_n) admet une valeur d'adhérence $\ell \in K_0$.

b) Montrer que $\ell \in K_p$ pour tout p, et conclure que $\bigcap K_n \neq \varnothing$.

c) Montrer que le résultat est faux pour des fermés non bornés ($F_n = [n, +\infty[$) et pour des bornés non fermés ($]0, \frac{1}{n}]$).

Exercice 15 – Synthèse : distance entre deux compacts

Soient K et L deux compacts **disjoints** et non vides de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $d(K,L) = \inf_{x\in K, y\in L}\|x-y\| > 0$ et que l'infimum est atteint.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).