Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : la compacité en analyse, algèbre et géométrie

Compacité — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Dans un problème, la compacité intervient presque toujours en **deux temps** : d'abord un argument d'**existence** (une borne atteinte, une sous-suite convergente, un minimum sur un compact bien choisi), puis un argument **quantitatif** qui identifie l'objet obtenu (inégalité de convexité, calcul explicite, cas d'égalité). Quand l'ensemble de départ n'est pas compact, on s'y ramène : **coercivité** (la fonction est grande hors d'une boule), **périodicité** (une période suffit), **limites à l'infini** (un segment suffit). On retrouve ainsi l'équivalence des normes, le théorème de d'Alembert-Gauss ou l'existence de la boule minimale.

Exercice 1 – Équivalence des normes en dimension finie

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n, de base $(e_1, \dots, e_n)$, et $N_\infty(x) = \max_i |x_i|$ si $x = \sum x_i e_i$. Soit N une norme quelconque sur E.

a) Montrer que $N(x) \le C\,N_\infty(x)$ avec $C = \sum_i N(e_i)$, et en déduire que N est continue sur (E, N_∞).

b) Montrer que la sphère $S = \{x \mid N_\infty(x) = 1\}$ est compacte pour N_∞.

c) En déduire l'existence de $m > 0$ tel que $m\,N_\infty \le N \le C\,N_\infty$.

d) Sur $\mathbb{R}^2$, déterminer les meilleures constantes pour $N(x,y) = |x| + 2|y|$.

Exercice 2 – Sous-espace de dimension finie et meilleure approximation

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé quelconque et F un sous-espace de **dimension finie**.

a) Montrer que F est fermé dans E.

b) Soit $a \in E$ et $\delta = d(a, F)$. Montrer que $K = \{y \in F \mid \|a - y\| \le \delta + 1\}$ est compact, puis que δ est atteinte.

c) Dans $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, avec F la droite des fonctions constantes, calculer $d(f, F)$ pour $f(x) = x^2$ et trouver la constante la plus proche.

Exercice 3 – Minimum du module d'un polynôme

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \ge 1$.

a) Montrer que $|P(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$, puis que $|P|$ atteint un minimum sur $\mathbb{C}$ en un point z_0.

b) On suppose $P(z_0) \neq 0$. On écrit $P(z_0 + h) = P(z_0) + c h^k + h^{k+1} Q(h)$ avec $c \neq 0$, $k \ge 1$, Q polynomial. Choisir ω avec $c\,\omega^k = -P(z_0)$ et étudier $|P(z_0 + t\omega)|$ pour $t > 0$ petit.

c) En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Applications propres

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ continue. On dit que f est **propre** si $f^{-1}(K)$ est compact pour tout compact K de $\mathbb{R}^p$.

a) Montrer que si $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, alors f est propre.

b) Montrer la réciproque (raisonner par l'absurde avec une suite).

c) Les applications $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $g(x,y) = x^4 + y^2 - 3xy$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont-elles propres ?

Exercice 5 – Puissances bornées et valeurs propres de module un

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que l'ensemble $\{A^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ soit borné.

a) Montrer que toute valeur propre de A est de module 1.

b) Calculer J^k pour $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et montrer que $(J^k)_{k \geq 0}$ n'est pas bornée si $|\lambda| = 1$.

c) On suppose $n = 2$. Montrer que A est diagonalisable.

d) Réciproquement, montrer que si A est diagonalisable à valeurs propres de module 1, l'adhérence de $\{A^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est compacte.

Exercice 6 – Entropie maximale

Soit $\Delta = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \mid p_i \geq 0,\ \sum_i p_i = 1 \right\}$ et $H(p) = -\sum_i p_i \ln p_i$, avec la convention $0 \ln 0 = 0$.

a) Montrer que Δ est compact et que $\varphi : t \mapsto -t \ln t$ (prolongée par $\varphi(0) = 0$) est continue sur $[0,1]$.

b) En déduire que H atteint un maximum et un minimum sur Δ.

c) Montrer que φ est concave et en déduire $\max_\Delta H = \ln n$, atteint pour la loi uniforme.

d) Déterminer $\min_\Delta H$ et les points où il est atteint.

Exercice 7 – Norme subordonnée atteinte

On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|\cdot\|_\infty$ et, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $|||A||| = \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$.

a) Montrer que ce sup est un maximum, atteint sur la sphère unité.

b) Montrer que $|||A||| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$, en exhibant un vecteur qui réalise l'égalité.

c) Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 – Déterminant maximal sur une boule

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme de Frobenius $\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}A)}$ et on pose $B = \{A \mid \|A\|_F \leq \sqrt{n}\}$.

a) Justifier que $\det$ atteint un maximum sur B.

b) Avec les valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0$ de $A^{\mathsf{T}}A$, montrer que $(\det A)^2 \leq \left(\dfrac{\|A\|_F^2}{n} \right)^n$, puis que $\max_B \det = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que le maximum est atteint exactement sur $SO(n)$.

Exercice 9 – Fonctions continues périodiques

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et T-périodique ($T>0$).

a) Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

b) Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (utiliser Heine sur $[-T, 2T]$).

c) Déterminer le maximum et le minimum de $f(x)=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$.

Exercice 10 – Somme d'un compact et d'un fermé

Dans un espace vectoriel normé E, on note $A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$.

a) Montrer que si K et L sont compacts, $K+L$ est compact.

b) Montrer que si K est compact et F fermé, $K+F$ est fermé.

c) Dans $\mathbb{R}^2$, avec $F=\{(x,y)\mid x>0,\ xy=1\}$ et $G=\mathbb{R}\times\{0\}$, montrer que F et G sont fermés mais que $F+G$ ne l'est pas.

Exercice 11 – Continuité uniforme et limites à l'infini

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, admettant des limites finies ℓ en $+\infty$ et ℓ' en $-\infty$.

a) Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

b) La réciproque est-elle vraie ?

c) On suppose $\ell=\ell'$ et que f prend une valeur strictement supérieure à ℓ. Montrer que f admet un maximum ; le calculer pour $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

Exercice 12 – Maximum d'une forme linéaire sur une courbe

Soit $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^4+y^4=1\}$.

a) Montrer que C est compact.

b) En déduire que $h(x,y)=x+y$ atteint ses bornes sur C.

c) À l'aide de la convexité de $t\mapsto t^4$, montrer que $\max_C h = 2^{3/4}$ et préciser où il est atteint.

d) Comparer avec le maximum de $x+y$ sur le cercle unité.

Exercice 13 – Projection d'un fermé le long d'un compact

Soit $K\subset\mathbb{R}^q$ compact et $F\subset\mathbb{R}^p\times K$ fermé. On note $\pi(F)=\{x\in\mathbb{R}^p \mid \exists y\in K,\ (x,y)\in F\}$.

a) Montrer que $\pi(F)$ est fermé.

b) Montrer que la projection sur l'axe des abscisses de l'hyperbole $\{xy=1\}$ n'est pas fermée. Quelle hypothèse manque ?

c) Application : montrer que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant au moins une racine dans $[0,1]$ est fermé.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Boule fermée minimale contenant un compact

Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ euclidien. Pour $c \in \mathbb{R}^n$, on pose $r(c) = \max_{x \in K} \|x - c\|$.

a) Justifier que $r(c)$ existe et montrer que r est 1-lipschitzienne.

b) Montrer que r atteint son minimum ρ (coercivité).

c) Montrer, avec l'identité du parallélogramme, que le centre c réalisant ce minimum est unique.

d) Déterminer la boule minimale pour $K = \{(0,0), (4,0), (0,3)\}$.

Exercice 15 – Synthèse : polynômes dont les racines sont dans le disque unité

On note E_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{C}[X]$ dont toutes les racines sont dans le disque fermé $\overline{D} = \{|z| \leq 1\}$, identifié à une partie de $\mathbb{C}^n$ via $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \mapsto (a_0, \ldots, a_{n-1})$.

a) Montrer que E_n est borné (relations coefficients-racines).

b) Montrer que E_n est fermé. Indication : si $P_j \to P$ et $|z| > 1$, minorer $|P_j(z)|$.

c) En déduire que $P \mapsto |P(2)|$ atteint ses bornes sur E_n, et les calculer.

d) L'ensemble des polynômes unitaires de degré n dont les racines sont dans le disque **ouvert** est-il compact ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).