Plaquette 2 – Reconnaître un compact en dimension finie : exemples et contre-exemples

Compacité — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

En dimension finie, **compact = fermé et borné**. Pour montrer qu'une partie est compacte, on vérifie séparément : **fermée** (image réciproque d'un fermé par une application continue, ou caractérisation séquentielle) et **bornée** (majoration explicite de la norme). Autre voie : écrire la partie comme **image continue** d'un compact, ou comme **produit** ou **intersection** de compacts. Pour montrer qu'une partie n'est **pas** compacte, il suffit d'une suite qui sort de tout borné, ou d'une suite convergeant hors de la partie.

Exercice 1 – Parties compactes du plan

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles compactes ?

a) $A = \{(x,y) \mid x^4 + y^4 \leq 1\}$ et $B = \{(x,y) \mid x^2 - y^2 \leq 1\}$.

b) $C = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

c) $D = \{(t, \sin t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$ et $E = \{(t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 – Le groupe orthogonal est compact

a) Montrer que $O(n)$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $O(n)$ est borné pour $\|\cdot\|_F$ et pour $\|\cdot\|_\infty$ (coefficients).

c) En déduire que $O(n)$ et $SO(n)$ sont compacts.

Exercice 3 – Des ensembles de matrices non compacts

Montrer que les parties suivantes de $M_2(\mathbb{R})$ ne sont pas compactes.

a) $\{A \mid A^2 = I\}$.

b) L'ensemble N des matrices nilpotentes.

c) $GL_2(\mathbb{R})$ et $SL_2(\mathbb{R}) = \{\det A = 1\}$.

Exercice 4 – Matrices stochastiques

Soit P_n l'ensemble des matrices stochastiques ($p_{ij} \geq 0$, $\sum_j p_{ij} = 1$).

a) Montrer que P_n est compact et convexe.

b) Montrer que l'application $P \mapsto P^2$ envoie P_n dans lui-même.

c) En déduire que pour $P \in P_n$, la suite (P^k) admet une sous-suite convergente, de limite stochastique.

Exercice 5 – Graphe d'une fonction continue

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $G = \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\}$.

a) Montrer que si f est continue, G est compact.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Réciproquement, montrer que si G est compact, f est continue (si $x_n \to x$, étudier les valeurs d'adhérence de $(f(x_n))$).

c) Montrer que le graphe de $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$, $f(0) = 0$, sur $[0,1]$ est fermé mais pas compact.

Exercice 6 – Image réciproque et image directe

Soit $f{:}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$.

a) Montrer que $f(x,y) \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

b) En déduire que $K = f^{-1}([0,1])$ est compact.

c) L'image réciproque d'un compact par une application continue est-elle toujours compacte ? (Considérer $g(x,y) = x$.)

Exercice 7 – Réunions et intersections

a) Montrer qu'une réunion finie de compacts est compacte.

b) Montrer qu'une intersection quelconque de compacts est compacte.

c) Une réunion dénombrable de compacts est-elle compacte ? (Considérer $[n, n+1]$, puis $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$.)

Exercice 8 – Compacité d'un ensemble de polynômes

Soit $K = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid |P(0)| \leq 1,\ |P(1)| \leq 1,\ |P(2)| \leq 1\}$.

a) Montrer que $N(P) = \max(|P(0)|, |P(1)|, |P(2)|)$ est une norme sur $\mathbb{R}_2[X]$.

b) En déduire que K est compact.

c) Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid |P(0)| \leq 1,\ |P(1)| \leq 1\}$ n'est pas compact.

Exercice 9 – Suite et sa limite

Soit (u_n) une suite convergente de limite ℓ dans un evn.

a) Montrer que $K = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

b) Montrer que $\{u_n\}$ seul n'est pas toujours compact.

c) Application : $\left\langle \left(\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n} \right) \right\rangle \cup \{(0,0)\}$.

Exercice 10 – Matrices à spectre unitaire

Soit $U = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \overline{A}^{\mathsf{T}} A = I\}$ (matrices unitaires).

a) Montrer que U est compact.

b) Montrer que l'ensemble $R = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A \subset \mathrm{U}\}$ n'est pas compact (considérer $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

c) Est-il fermé ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Produit de compacts

a) Montrer que si $K_1 \subset E_1$ et $K_2 \subset E_2$ sont compacts, $K_1 \times K_2$ est compact (double extraction).

b) En déduire que le tore $\mathrm{T} = \{(\cos a, \sin a, \cos b, \sin b)\} \subset \mathbb{R}^4$ est compact.

c) Montrer que f:T $\to \mathbb{R}$, $f = x_1x_3 + x_2x_4$, atteint ses bornes et les calculer.

Exercice 12 – Compacts de R et bornes

a) Montrer qu'un compact non vide K de $\mathbb{R}$ admet un plus grand et un plus petit élément.

b) Montrer que $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ n'est pas compact.

c) Montrer que $K = \left\langle \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \geq 1 \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \right\rangle \cup \{0\}$ est compact et donner son maximum.

Exercice 13 – Image d'un compact par une application non continue

a) Donner une fonction f:$[0,1] \to \mathbb{R}$ dont l'image n'est pas bornée.

b) Donner une fonction g:$[0,1] \to \mathbb{R}$ bornée dont l'image n'est pas fermée.

c) Que montre cet exercice sur le rôle de la continuité ?

Exercice 14 – Compacité des matrices de projection orthogonale

Soit P_r l'ensemble des matrices de projecteurs orthogonaux de rang r dans $M_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $P_r = \{P \mid P^2 = P,\ P^{\mathrm{T}} = P,\ \mathrm{tr}P = r\}$.

b) En déduire que P_r est fermé et borné.

c) Conclure. Décrire P_1 pour $n = 2$.

Exercice 15 – Synthèse : un ensemble défini par des inégalités

Soit $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$.

a) Montrer que K est fermé.

b) Montrer que K est borné (majorer z puis $x^2 + y^2$).

c) En déduire que K est compact, puis que $f(x, y, z) = x + y + z$ y atteint son maximum.

d) Calculer ce maximum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).