Plaquette 1 – Chemins, parties connexes par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Connexité par arcs — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions.

— Un **chemin** de a à b dans A est une application **continue** $\gamma:[0\,;1]\to A$ avec $\gamma(0)=a$ et $\gamma(1)=b$.

— A est **connexe par arcs** si deux points quelconques de A peuvent être reliés par un chemin **tracé dans** A.

Critères suffisants.

— Toute partie **convexe** est connexe par arcs (le segment $\gamma(t)=(1-t)a+tb$ convient).

— Toute partie **étoilée** par rapport à un point c (c'est-à-dire $[c,x]\subset A$ pour tout $x\in A$) est connexe par arcs.

— Une **réunion** de connexes par arcs ayant un **point commun** est connexe par arcs ; on recolle les chemins γ_1 (de x à c) et γ_2 (de c à y) par **concaténation** :

$$\gamma(t)=\gamma_1(2t)\text{ pour }t\le\frac{1}{2},\qquad \gamma(t)=\gamma_2(2t-1)\text{ pour }t\ge\frac{1}{2}$$

— L'**image continue** d'un connexe par arcs est connexe par arcs.

Dans $\mathbb{R}$. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement les **intervalles**.

— **Théorème des valeurs intermédiaires** : si f est continue sur un connexe par arcs A et à valeurs réelles, alors $f(A)$ est un **intervalle**. En particulier, si f prend deux valeurs de signes opposés, elle s'annule.

Composantes connexes par arcs. La relation « être reliable par un chemin dans A » est une **relation d'équivalence** ; ses classes sont les **composantes connexes par arcs** de A.

Exemples classiques.

— $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs ; $GL_n(\mathbb{R})$ **ne l'est pas** : il a **deux** composantes, $\det>0$ et $\det<0$.

— $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes (SO_n et son complémentaire) ; $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

— $\mathbb{R}^n$ privé d'un point est connexe par arcs **pour** $n\ge 2$, mais pas pour $n=1$.

Correction de l'exercice 1 – Convexité et connexité

— La boule est **convexe** : pour $x,y\in B(a,r)$ et $t\in[0\,;1]$,

$$\|tx+(1-t)y-a\|\le t\|x-a\|+(1-t)\|y-a\|<r$$

— **Chemin explicite** : $\gamma(t)=(1-t)x+ty$ est continue (affine en t), vérifie $\gamma(0)=x$, $\gamma(1)=y$, et reste dans la boule d'après ce qui précède.

— **Conclusion** : la boule est **connexe par arcs**.

— **Portée** : tout convexe (boule, segment, demi-espace, espace entier) est connexe par arcs — c'est l'argument le plus rapide, à mentionner systématiquement quand il s'applique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. La boule est convexe : le segment $[x, y]$ y est inclus.

Correction de l'exercice 2 – Plan privé d'un point

Dans $\mathbb{R}^2$. Soient a, b deux points non nuls.

— Si le segment $[a, b]$ ne passe pas par l'origine, il convient directement.
— Sinon, a, O et b sont alignés ; on choisit un point c **hors de cette droite** et on emprunte le chemin $a \to c \to b$, formé de deux segments ne contenant pas O.
— Donc $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ est **connexe par arcs**.

Dans $\mathbb{R}$. $\mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

— Un chemin continu de -1 à 1 prendrait, par le **TVI**, la valeur 0 — interdite.
— Il y a donc **deux composantes connexes par arcs**.
— **Généralisation** : $\mathbb{R}^n$ privé d'un point est connexe par arcs dès que $n \geq 2$; « on peut contourner un point » à partir de la dimension 2.

Réponse. Dans $\mathbb{R}^2$ on contourne l'origine ; dans $\mathbb{R}$ le TVI l'interdit.

Correction de l'exercice 3 – Image continue

— $[0\,;3]$ est **connexe par arcs** (c'est un intervalle, donc convexe) et **compact**.
— L'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs, donc $f([0\,;3])$ est un **intervalle** de $\mathbb{R}$.
— L'image d'un compact étant compacte, c'est un **segment** $[m\,;M]$.
— Comme -1 et 5 sont dans l'image : $m \leq -1$ et $M \geq 5$, donc $[-1\,;5] \subset f([0\,;3])$.
— **Conséquence (TVI)** : f prend **toutes** les valeurs entre -1 et 5 ; en particulier elle **s'annule** au moins une fois sur $]0\,;3[$.
— **Attention** : on ne peut **pas** conclure que l'image est exactement $[-1\,;5]$ — f peut dépasser ces bornes (par exemple atteindre 10 en $x = 1$).

Réponse. Un segment contenant $[-1\,;5]$; f s'annule sur $]0\,;3[$.

Correction de l'exercice 4 – Sphère connexe

Les deux le sont.

— **Cercle** : le paramétrage $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ est continu et surjectif de $\mathbb{R}$ (connexe par arcs) sur le cercle — l'image continue d'un connexe par arcs l'est aussi.
— **Sphère de $\mathbb{R}^3$** : même argument avec $(\theta, \varphi) \mapsto (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$, image continue du rectangle $[0\,;2\pi] \times [0\,;\pi]$, qui est convexe.
— **Chemin explicite entre a et b sur la sphère** : si $b \neq -a$, on prend $\gamma(t) = \dfrac{(1-t)a + tb}{\|(1-t)a + tb\|}$ — c'est l'**arc de grand cercle**, bien défini car le segment ne passe pas par l'origine.
— **Cas $b = -a$** : on passe par un point intermédiaire.
— **Contraste avec $\mathbb{R}$** : la sphère de $\mathbb{R}^1$, c'est $\{-1, 1\}$ — **non** connexe par arcs. La connexité de la sphère commence en dimension 2.

Réponse. Oui pour les deux (images continues de connexes).

Correction de l'exercice 5 – Le groupe linéaire réel n'est pas connexe

Raisonnement par l'absurde via le déterminant.

— Soient A avec $\det A > 0$ (par exemple I_n) et B avec $\det B < 0$ (par exemple I_n avec un -1).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Supposons qu'il existe un chemin continu $\gamma : [0\,;1] \to GL_n(\mathbb{R})$ de A à B.
— L'application suivante est **continue** (le déterminant est polynomial en les coefficients) :

$$\varphi : t \mapsto \det \gamma(t), \qquad \varphi(0) = \det A > 0, \quad \varphi(1) = \det B < 0$$

— Elle vaut $\det A > 0$ en 0 et $\det B < 0$ en 1 : par le **TVI**, elle s'annule en un t_0.
— Mais alors $\gamma(t_0)$ est **non inversible**, donc hors de $GL_n(\mathbb{R})$: contradiction.
— **Conclusion** : $GL_n(\mathbb{R})$ a (au moins) **deux composantes connexes par arcs**, GL_n^+ et GL_n^- — on montre qu'il y en a exactement deux.
— **Sur** $\mathbb{C}$, en revanche, $GL_n(\mathbb{C})$ est **connexe par arcs** : le déterminant y est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, qui est connexe par arcs (on peut contourner 0).

Réponse. Le déterminant, continu, devrait s'annuler par le TVI.

Correction de l'exercice 6 – Réunion de connexes

Soit $c \in A \cap B$, et soient $x, y \in A \cup B$.

— **Cas 1** : $x, y \in A$ — un chemin dans A suffit.
— **Cas 2** : $x, y \in B$ — idem dans B.
— **Cas 3** : $x \in A$ et $y \in B$. On relie x à c **dans** A, puis c à y **dans** B.
— La **concaténation** de ces deux chemins (parcourus chacun sur un demi-intervalle) est continue car les deux morceaux **coïncident en** c ; elle reste dans $A \cup B$.
— **Conclusion** : $A \cup B$ est connexe par arcs.
— **L'hypothèse d'intersection non vide est indispensable** : $]0\,;1[\cup]2\,;3[$ est une réunion de deux connexes **disjoints**, et n'est pas connexe par arcs.

Réponse. On concatène un chemin $x \to c$ dans A et $c \to y$ dans B.

Correction de l'exercice 7 – Composantes connexes

La condition $xy > 0$ décrit les points où x et y sont **de même signe strict**.

— $A = A_+ \cup A_-$ avec $A_+ = \{x > 0,\, y > 0\}$ (premier quadrant ouvert) et $A_- = \{x < 0,\, y < 0\}$.
— **Chacun est convexe** (intersection de deux demi-plans ouverts), donc connexe par arcs.
— **Ils ne communiquent pas** : un chemin de A_+ à A_- aurait une abscisse continue passant de positive à négative, donc s'annulant (TVI) ; or $x = 0$ donne $xy = 0$, exclu de A.
— **Conclusion** : A a exactement **deux** composantes connexes par arcs, A_+ et A_-.
— **Contraste** : $\{xy \neq 0\}$ a **quatre** composantes (les quatre quadrants ouverts).

Réponse. Deux composantes : les quadrants ouverts $\{x > 0, y > 0\}$ et $\{x < 0, y < 0\}$.

Correction de l'exercice 8 – Partie étoilée

A est le plan privé de la **demi-droite** des abscisses positives.

— **Étoilement** : A est étoilé par rapport au point $c = (-1, 0)$.
— En effet, pour $M \in A$, le segment $[c, M]$ ne rencontre pas la demi-droite interdite : un point de ce segment d'ordonnée nulle serait combinaison convexe de c (d'abscisse < 0) et de M ; si M a une ordonnée non nulle, le seul point d'ordonnée nulle du segment est c lui-même. Si M est sur l'axe, il a nécessairement une abscisse < 0, et tout le segment reste sur la partie négative de l'axe.
— Toute partie **étoilée** étant connexe par arcs, A l'est.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Chemin concret** : $M \to (-1,0) \to M'$ en deux segments.
— **Remarque** : ce plan fendu est le domaine sur lequel on définit une **détermination continue de l'argument** (et donc du logarithme complexe) — c'est là son utilité principale.

Réponse. A est étoilé par rapport à $(-1,0)$.

Correction de l'exercice 9 – Fonction localement constante

— A étant connexe par arcs et f continue à valeurs réelles, $f(A)$ est un **intervalle** de $\mathbb{R}$.
— Or $f(A) \subset \mathbb{Z}$: le seul intervalle contenu dans $\mathbb{Z}$ et non vide est un **singleton** (un intervalle contenant deux entiers distincts contiendrait tous les réels intermédiaires, dont des non-entiers).
— **Conclusion** : f est **constante**.
— **Application typique** : c'est l'argument du déterminant sur $O_n(\mathbb{R})$ — l'application $M \mapsto \det M$ y est continue à valeurs dans $\{-1,1\}$, donc constante sur chaque composante connexe.
— **Version générale** : sur un connexe, toute fonction continue à valeurs **discrètes** est constante. C'est le principe de tous les « invariants » topologiques.

Réponse. $f(A)$ est un intervalle inclus dans $\mathbb{Z}$, donc un singleton.

Correction de l'exercice 10 – Théorème des valeurs intermédiaires généralisé

— $\mathbb{R}^2$ est **convexe**, donc connexe par arcs ; en particulier on peut relier les deux points par le segment $\gamma(t) = (t,t)$, $t \in [0\,;1]$.
— La fonction $g = f \circ \gamma$ est **continue** sur $[0\,;1]$, avec $g(0) = -3 < 0$ et $g(1) = 4 > 0$.
— Le **TVI** en une variable donne un $t_0 \in]0\,;1[$ tel que $g(t_0) = 0$.
— Donc $f(t_0,t_0) = 0$: f **s'annule**.
— **Formulation générale** : l'image d'un connexe par arcs par une application continue réelle est un **intervalle**, donc contient toutes les valeurs intermédiaires.
— **Le résultat tombe sans connexité** : sur $A = \{(x,y) \mid xy > 0\}$, la fonction $f(x,y) = x$ prend les valeurs 1 et -1 mais ne s'annule jamais sur A.

Réponse. On restreint f au segment et on applique le TVI usuel.

Correction de l'exercice 11 – Connexité de SO(n)

— $SO(2)$ est exactement l'ensemble des rotations $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
— L'application $\theta \mapsto R_\theta$ est **continue** de $\mathbb{R}$ (connexe par arcs) sur $SO(2)$, et **surjective**.
— L'image continue d'un connexe par arcs étant connexe par arcs, $SO(2)$ l'est.
— **Chemin explicite** de $I_2 = R_0$ à $R_\pi = -I_2$:

$$\gamma(t) = R_{t\pi}, \qquad t \in [0\,;1]$$

— **Contrôle** : $\gamma(0) = I_2$, $\gamma(1) = R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et $\det \gamma(t) = 1$ pour tout t ✓ — le chemin reste bien dans $SO(2)$.
— **Conséquence** : $-I_2$ est une rotation, donc dans la composante $\det > 0$ de $GL_2(\mathbb{R})$ — cohérent avec $\det(-I_2) = 1$.

Réponse. $\theta \mapsto R_\theta$ est continue surjective ; $\gamma(t) = R_{t\pi}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Les deux branches d'une hyperbole

a) H_+ est l'image de l'intervalle $]0, +\infty[$, connexe par arcs, par l'application continue

$$t \mapsto \left(t, \frac{1}{t}\right)$$

donc H_+ est connexe par arcs ; de même H_-, image de $]-\infty, 0[$.

b) Un chemin $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ dans H de $(1,1)$ à $(-1,-1)$ aurait une première coordonnée continue passant de 1 à -1, donc s'annulant (TVI) ; or aucun point de H n'a d'abscisse nulle ($0 \times y \neq 1$).

c) La droite $y = x$ est connexe par arcs et rencontre H_+ en $(1,1)$ et H_- en $(-1,-1)$: la réunion de ces trois connexes par arcs, enchaînés par des points communs, est connexe par arcs. **Une seule** composante.

Réponse. H a deux composantes (les branches) ; en ajoutant la droite $y = x$, on obtient un connexe par arcs.

Correction de l'exercice 13 – Injection continue et monotonie

a) T est **convexe** : si $x < y$ et $x' < y'$, alors pour $t \in [0,1]$, $(1-t)x + tx' < (1-t)y + ty'$, et ces points restent dans I (intervalle, donc convexe). Donc T est connexe par arcs.

b) φ est continue sur T et ne s'annule pas (f injective et $x \neq y$). Son image $\varphi(T)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0 :

$$\varphi(T) \subset]0, +\infty[\quad \text{ou} \quad \varphi(T) \subset]-\infty, 0[$$

Dans le premier cas, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$: f strictement croissante ; dans le second, strictement décroissante.

Réponse. T convexe ; $f(y) - f(x)$ garde un signe constant sur T : f strictement monotone.

Correction de l'exercice 14 – Pas d'injection continue du plan dans la droite

a) $\mathbb{R}^2$ est convexe donc connexe par arcs, et l'image continue d'un connexe par arcs de $\mathbb{R}$ est un intervalle.

b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ est connexe par arcs (on contourne un point en dimension 2), donc son image est un intervalle ; par injectivité,

$$f\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}\right) = I \setminus \{f(p)\}$$

Si $f(p)$ était intérieur à I, il existerait $a < f(p) < b$ dans $I \setminus \{f(p)\}$, intervalle qui devrait contenir $f(p)$: absurde. Donc $f(p)$ est une extrémité de I.

c) Un intervalle a au plus deux extrémités, alors que l'injectivité donnerait une infinité de valeurs $f(p)$ distinctes, toutes extrémités : contradiction. Une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ n'est jamais injective ; en particulier $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Réponse. Retirer un point laisse le plan connexe mais coupe l'intervalle image : aucune injection continue $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : parties connexes de R

Sens 1 : tout intervalle est connexe par arcs.

— Un intervalle est **convexe** : pour $a < b$ dedans, le segment $[a, b]$ y est inclus.
— Le chemin $\gamma(t) = (1-t)a + tb$ est continu et reste dans l'intervalle.

Sens 2 : une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$ est un intervalle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Soit A connexe par arcs, $a, b \in A$ avec $a < b$, et $c \in]a\,;b[$.
— Il existe un chemin continu $\gamma{:}[0\,;1] \to A$ avec $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.
— Par le **TVI** appliqué à γ (continue et réelle), il existe t_0 avec $\gamma(t_0) = c$.
— Or γ est à valeurs **dans** A, donc $c \in A$.
— A contient donc tout point compris entre deux de ses éléments : c'est la **caractérisation des intervalles**.
— **Conclusion** : les deux notions coïncident dans $\mathbb{R}$ — ce qui explique pourquoi le TVI de terminale est un cas particulier du théorème général sur les connexes.

Réponse. Intervalle $\Rightarrow$ convexe ; réciproque par le TVI appliqué au chemin.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).