Plaquette 3 – Connexité par arcs des groupes et ensembles de matrices

Connexité par arcs — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Résultats de référence.

— $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs ; $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes, GL_n^+ et GL_n^-.
— $SO(n)$ est connexe par arcs ; $O(n) = SO(n) \cup O^-(n)$.
— Réduction des matrices orthogonales : pour $A \in SO(n)$, il existe $P \in O(n)$ telle que

$$P^{\mathsf{T}}AP = \operatorname{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_m}, I_{n-2m}), \qquad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Le « truc » du signe. Si $D = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, -1)$ commute avec M, alors $PMP^{-1} = (PD)M(PD)^{-1}$ avec $\det(PD) = -\det P$: on peut toujours prendre $P \in GL_n^+(\mathbb{R})$.

Invariants séparants. det (sur GL_n, $O(n)$), $\mathrm{tr}P = \mathrm{rg}P$ (projecteurs), signe d'un coefficient qui ne s'annule pas.

Correction de l'exercice 1 – Le groupe linéaire complexe est connexe par arcs

a) Le déterminant est polynomial en les coefficients, eux-mêmes affines en z : p est un polynôme de degré $\leq n$. Il n'est pas nul car $p(0) = \det A \neq 0$, donc il a au plus n racines.

b) $\mathbb{C} \setminus Z$ est le plan privé d'un nombre fini de points : il est connexe par arcs (une ligne brisée $0 \to c \to 1$ évite Z pour tous les c sauf un nombre fini, les lignes brisées $[0, c] \cup [c, 1]$, c sur la médiatrice de $[0, 1]$, étant deux à deux disjointes hors de 0 et 1).

c) Le chemin

$$\gamma(t) = (1 - z(t))A + z(t)B$$

est continu, vérifie $\gamma(0) = A$, $\gamma(1) = B$, et $\det \gamma(t) = p(z(t)) \neq 0$: il reste dans $GL_n(\mathbb{C})$.

d) Dans $\mathbb{R}$, retirer les racines de p coupe $[0, 1]$: on ne peut pas les contourner. C'est cohérent avec la non-connexité de $GL_n(\mathbb{R})$.

Réponse. $\det((1 - z)A + zB)$ n'a qu'un nombre fini de racines, que l'on contourne dans $\mathbb{C}$: $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Correction de l'exercice 2 – Matrices de déterminant positif

a) $t \mapsto I_n + t\lambda E_{il}$ est continu, de I_n à T, et $\det(I_n + t\lambda E_{il}) = 1$ (matrice triangulaire à diagonale unité, $i \neq l$).

b) Pour $A \in GL_n^+$, $d = \det A > 0$, et le chemin

$$\gamma(t) = (I_n + t\lambda_1 E_1) \cdots (I_n + t\lambda_k E_k)\, D(1 - t + td)$$

est continu (produit de fonctions continues), avec $\det \gamma(t) = 1 - t + td > 0$, $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$. Toute matrice de GL_n^+ est reliée à I_n : GL_n^+ est connexe par arcs.

c) $GL_n^- = S\,GL_n^+$ avec $S = D(-1)$ est l'image de GL_n^+ par $M \mapsto SM$ continue : connexe par arcs. Et GL_n^+, GL_n^- ne communiquent pas : det continue changerait de signe sans s'annuler le long d'un chemin.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. On fait tendre les transvections vers I_n et la dilatation $d > 0$ vers 1 : GL_n^+ connexe par arcs ; deux composantes pour $GL_n(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 3 – Le groupe spécial orthogonal

a) La réduction donne des blocs R_θ, des 1 et des -1 ; le nombre q de -1 vérifie $(-1)^q = \det A = 1$, donc q est pair, et chaque paire forme $-I_2 = R_\pi$.

b) Le chemin

$$\gamma(t) = P\mathrm{diag}(R_{t\theta_1}, \dots, R_{t\theta_m}, I_{n-2m})P^{\mathsf{T}}$$

est continu, à valeurs dans $SO(n)$ (produit de matrices orthogonales, de déterminant 1), de I_n à A.

c) $SO(n)$ est connexe par arcs ; $O^-(n) = S \cdot SO(n)$ avec $S = \mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, image continue, aussi. Le déterminant, continu à valeurs dans $\{-1, 1\}$, sépare ces deux parties.

d) $\mathrm{diag}(-1, -1, 1)$ est la rotation d'angle π autour de e_3 : $\gamma(t) = \mathrm{diag}(R_{\pi t}, 1)$, avec $\gamma(1) = \mathrm{diag}(-1, -1, 1)$.

Réponse. $\gamma(t) = P\mathrm{diag}(R_{t\theta_j}, I)P^{\mathsf{T}}$: $SO(n)$ connexe par arcs ; $O(n)$ a deux composantes.

Correction de l'exercice 4 – Matrices symétriques inversibles de taille deux

a) Les valeurs propres λ, μ sont réelles (théorème spectral). Si $\mathrm{tr} S = 0$, alors $\mu = -\lambda$ et $\det S = -\lambda^2 \leq 0$.

b) Le long d'un chemin dans S^*, det ne s'annule pas, donc garde son signe ; si $\det > 0$, la trace ne s'annule pas (a)), donc garde aussi son signe. Les parties $\{\det > 0, \mathrm{tr} > 0\}$, $\{\det > 0, \mathrm{tr} < 0\}$ et $\{\det < 0\}$, non vides (I_2, $-I_2$, $\mathrm{diag}(1, -1)$), ne communiquent donc pas.

c) Si $\det S < 0$: $S = P\mathrm{diag}(\lambda, \mu)P^{\mathsf{T}}$ avec $\lambda > 0 > \mu$ et $P \in O(2)$; quitte à changer le signe d'une colonne, $P = R_\theta \in SO(2)$. Le chemin

$$\gamma(t) = R_{(1-t)\theta}\mathrm{diag}((1-t)\lambda + t, (1-t)\mu - t)R_{(1-t)\theta}^{\mathsf{T}}$$

reste symétrique de déterminant < 0 et relie S à $\mathrm{diag}(1, -1)$.

d) Les deux autres parties sont les matrices symétriques définies positives (convexe) et leur opposé : connexes par arcs. Exactement trois composantes, une par signature.

Réponse. Trois composantes : définies positives, définies négatives, et $\{\det < 0\}$ (signature $(1, 1)$).

Correction de l'exercice 5 – Projecteurs de rang donné

a) Un projecteur de rang r est diagonalisable, de matrice J_r dans une base adaptée à $\mathrm{Im} P \oplus \ker P$; réciproquement gJ_rg^{-1} est un projecteur de rang r.

b) $D = \mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ est diagonale, donc commute avec J_r : si $\det g < 0$, $gJ_rg^{-1} = (gD)J_r(gD)^{-1}$ avec $\det(gD) > 0$. Ainsi P_r est l'image de $GL_n^+(\mathbb{R})$, connexe par arcs, par l'application continue $g \mapsto gJ_rg^{-1}$ (l'inverse est continu via la comatrice).

c) Pour un projecteur,

$$\mathrm{tr} P = \mathrm{rg} P \in \{0, 1, \dots, n\}$$

La trace est continue à valeurs entières : elle est constante le long d'un chemin dans P. Donc les P_r, $0 \leq r \leq n$, connexes par arcs et non vides, sont exactement les composantes.

Réponse. P_r image continue de GL_n^+ : connexe par arcs ; la trace (= rang) sépare : $n + 1$ composantes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Matrices diagonalisables

a) $D_n(\mathbb{C})$ est l'image de $GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$ par l'application continue

$$(P, \lambda) \mapsto P\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$$

produit de deux connexes par arcs : connexe par arcs.

b) Même écriture avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Comme $D = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ commute avec les matrices diagonales, on peut imposer $\det P > 0$ (remplacer P par PD). Donc $D_n(\mathbb{R})$ est l'image de $GL_n^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, connexe par arcs.

c) Si $M = P\Delta P^{-1}$ est diagonalisable, $tM = P(t\Delta)P^{-1}$ l'est aussi pour tout $t \in [0, 1]$: le segment $[0, M]$ est inclus dans $D_n(\mathbb{R})$. Une partie étoilée est connexe par arcs ; l'argument vaut aussi sur $\mathbb{C}$.

Réponse. Image continue de $GL_n \times \mathrm{K}^n$ (avec $\det P > 0$ sur $\mathbb{R}$) ; ou plus simplement : étoilé en 0.

Correction de l'exercice 7 – Matrices de rang donné

a) Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang, et J_r est de rang r.

b) Pour $r < n$, $D = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)$ vérifie

$$J_r D = J_r = D J_r$$

(le coefficient -1 est en position $n > r$, en face d'une ligne et d'une colonne nulles de J_r). Si $\det P < 0$, $PJ_rQ = (PD)J_rQ$; si $\det Q < 0$, $PJ_rQ = PJ_r(DQ)$. Donc R_r est l'image de $GL_n^+ \times GL_n^+$, connexe par arcs, par $(P, Q) \mapsto PJ_rQ$ continue.

c) $R_n = GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes : l'astuce échoue car $J_n D = D \neq J_n$, on ne peut plus absorber D dans J_n.

d) Oui : il est étoilé par rapport à 0, car $\mathrm{rg}(tM) \leq \mathrm{rg} M$ pour $t \in [0, 1]$.

Réponse. Pour $r < n$, R_r image de $GL_n^+ \times GL_n^+$: connexe par arcs ; $R_n = GL_n$: deux composantes ; rang $\leq r$: étoilé.

Correction de l'exercice 8 – Matrices de taille deux à valeurs propres réelles distinctes

a) $\chi_M = X^2 - (\mathrm{tr} M)X + \det M$ a pour discriminant $(\mathrm{tr} M)^2 - 4 \det M$: il est > 0 si et seulement si χ_M a deux racines réelles distinctes.

b) Une telle matrice est diagonalisable : $M = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)P^{-1}$ avec $\lambda_1 > \lambda_2$ (on ordonne les colonnes), et on peut prendre $\det P > 0$ (remplacer P par $P\mathrm{diag}(1, -1)$). Donc Ω_+ est l'image du produit $GL_2^+ \times \{\lambda_1 > \lambda_2\}$ (connexe par arcs × convexe) par

$$(P, \lambda_1, \lambda_2) \mapsto P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)P^{-1}$$

c) $\mathrm{diag}(0, 1) = R_{\pi/2}\mathrm{diag}(1, 0)R_{\pi/2}^{-1}$; le chemin $\gamma(t) = R_{t\pi/2}\mathrm{diag}(1, 0)R_{t\pi/2}^{-1}$ (projections orthogonales sur une droite qui tourne) a toujours les valeurs propres 1 et 0.

Réponse. Ω_+ : image continue de $GL_2^+ \times \{\lambda_1 > \lambda_2\}$, connexe par arcs ; chemin par rotation de la droite propre.

Correction de l'exercice 9 – Exponentielle et déterminant positif

a) On trigonalise A dans $M_n(\mathbb{C})$: $A = PTP^{-1}$; alors $\exp A = P \exp(T)P^{-1}$ et $\exp T$ est triangulaire de diagonale e^{λ_i} :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\det\exp A = \prod_i \mathrm{e}^{\lambda_i} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A} > 0$$

b) C'est l'image de $M_n(\mathbb{R})$, convexe, par l'application continue exp ; ou explicitement, $t \mapsto \exp(tA)$ relie I_n à $\exp A$.

c) Supposons $\exp B = \mathrm{diag}(-1,-2)$ avec $B \in M_2(\mathbb{R})$, de valeurs propres μ_1, μ_2 ; celles de $\exp B$ sont e^{μ_1}, e^{μ_2}. Si μ_1, μ_2 sont réelles, elles donnent des valeurs propres > 0 : exclu. Sinon $\mu_2 = \overline{\mu}_1$, et $\mathrm{e}^{\mu_2} = \overline{\mathrm{e}^{\mu_1}}$: les valeurs propres -1, -2 seraient conjuguées, donc égales (réelles) : absurde. L'image de exp est donc une partie connexe par arcs **stricte** de GL_2^+.

Réponse. $\det\exp A = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A} > 0$; image connexe par arcs, mais $\mathrm{diag}(-1,-2) \notin \exp(M_2(\mathbb{R}))$.

Correction de l'exercice 10 – Matrices non inversibles

a) $Z = \det^{-1}(\{0\})$ est fermé (det continu). Il est étoilé par rapport à 0 :

$$\det(tA) = t^n \det A = 0$$

donc connexe par arcs.

b) Pour A quelconque, $\det(A - \frac{1}{k} I_n) = \chi_A\left(\frac{1}{k}\right)$ (au signe près) ne s'annule que pour un nombre fini de k : $A - \frac{1}{k} I_n \in GL_n$ pour k grand, et tend vers A. Donc toute boule centrée en un point de Z rencontre GL_n : Z est d'intérieur vide.

c) La connexité par arcs ne passe pas au complémentaire : Z est une « hypersurface » qui sépare l'espace en deux régions, $\{\det > 0\}$ et $\{\det < 0\}$, comme un hyperplan sépare $\mathbb{R}^n$. Dans $\mathbb{C}$, Z ne sépare pas : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Réponse. Z fermé, étoilé en 0, d'intérieur vide (densité de GL_n) ; il sépare $\{\det > 0\}$ de $\{\det < 0\}$.

Correction de l'exercice 11 – Matrices triangulaires inversibles

a) Si $T, T' \in T_\varepsilon$ et $s \in [0,1]$, $(1-s)T + sT'$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux

$$\varepsilon_i((1-s)t_{ii} + st'_{ii}) = (1-s)\varepsilon_i t_{ii} + s\varepsilon_i t'_{ii} > 0$$

donc non nuls : la matrice est inversible et dans T_ε.

b) T est la réunion disjointe des 2^n parties T_ε, non vides ($\mathrm{diag}(\varepsilon)$), connexes par arcs. Le long d'un chemin dans T, chaque t_{ii} est continu et ne s'annule pas, donc garde son signe : on ne change pas de T_ε.

c) Une seule : pour deux telles matrices, on relie chaque coefficient diagonal dans $\mathbb{C}^*$ (connexe par arcs) et les autres coefficients par un segment ; la matrice reste triangulaire à diagonale non nulle.

Réponse. 2^n composantes (signes des coefficients diagonaux) ; une seule sur $\mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 12 – Matrices de permutation et composantes

a) Par la formule du déterminant, $\det P_\sigma = \sum_\pi \varepsilon(\pi) \prod_j (P_\sigma)_{\pi(j)j}$, et le seul terme non nul est $\pi = \sigma$:

$$\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$$

b) Les composantes de $GL_n(\mathbb{R})$ sont GL_n^+ et GL_n^- ; P_σ est dans la première si et seulement si $\varepsilon(\sigma) = 1$.

c) P_c envoie $e_1 \mapsto e_2 \mapsto e_3 \mapsto e_1$: elle est orthogonale de déterminant $\varepsilon(c) = 1$, fixe

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, et sa trace vaut $0 = 1 + 2\cos\theta$: c'est la rotation d'axe u et d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (le sens étant fixé par l'orientation de u). Le chemin $t \mapsto$ rotation d'axe u et d'angle $\frac{2\pi t}{3}$, soit $Q\mathrm{diag}(R_{2\pi t/3}, 1)Q^{\mathsf{T}}$ pour une base orthonormée directe Q terminant par u, relie I_3 à P_c dans $SO(3)$.

Réponse. $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$: même composante $\Leftrightarrow$ même signature ; $P_{(1\,2\,3)}$ = rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de $(1,1,1)$.

Correction de l'exercice 13 – Sous-groupe contenant un voisinage de l'identité

a) $M \mapsto hM$ est une bijection continue de G, de réciproque $M \mapsto h^{-1}M$ continue ; elle envoie le voisinage V de I_n sur un voisinage hV de h, inclus dans H (sous-groupe). Donc H est voisinage de chacun de ses points.

b) $G \setminus H$ est la réunion des classes gH pour $g \notin H$, chacune ouverte par a) (image de H par $M \mapsto gM$).

c) $\gamma^{-1}(H)$ et $\gamma^{-1}(G \setminus H)$ sont des ouverts de $[0,1]$ (images réciproques d'ouverts relatifs), donc f est continue. À valeurs dans $\{0,1\}$ sur l'intervalle $[0,1]$, elle est constante par le TVI :

$$f(1) = f(0) = 1_H(I_n) = 1$$

donc $g \in H$, et $H = G$ puisque G est connexe par arcs.

d) Le sous-groupe engendré par V contient V : il est égal à G.

Réponse. H ouvert et fermé dans le connexe par arcs G : $H = G$; tout voisinage de I_n engendre $GL_n^+(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 14 – Matrices de taille deux sans valeur propre réelle

a) $(\mathrm{tr}M)^2 - 4\det M = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc$.

b) Sur Ω_- : $4bc < -(a-d)^2 \leq 0$, donc $bc < 0$ et $b \neq 0$. La fonction continue b prend des valeurs des deux signes ($R_{\pi/2}$ et $R_{-\pi/2}$ sont dans Ω_-) sans s'annuler : pas connexe par arcs.

c) On pose $s = a + d$, $u = a - d$: la condition s'écrit $u^2 < -4bc$, avec s libre. Pour $M \in \Omega_-$, $b > 0$, $c < 0$, on enchaîne trois chemins dans $\Omega_- \cap \{b > 0\}$: $u \to 0$ (la condition reste vraie quand $|u|$ diminue), puis $(b,c) \to (1,-1)$ par un segment (dans le quadrant convexe $b > 0$, $c < 0$, avec $0 < -4bc$), puis $s \to 0$. On aboutit à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = R_{-\pi/2}$$

Donc $\Omega_- \cap \{b > 0\}$ est connexe par arcs, de même pour $b < 0$: exactement deux composantes.

d) R_θ a $b = -\sin\theta < 0$: elle est dans la composante $\{b < 0\}$, avec $R_{\pi/2}$.

Réponse. Ω_- a deux composantes, $\{b > 0\}$ et $\{b < 0\}$; R_θ $(0 < \theta < \pi)$ est dans $\{b < 0\}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : décomposition QR et groupes linéaires

a) $c_1 = (2,1)$, $\|c_1\| = \sqrt{5}$, $q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$; $\langle c_2, q_1\rangle = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $c_2 - \frac{3}{\sqrt{5}}q_1 = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$, de norme $\frac{1}{\sqrt{5}}$, d'où $q_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

On vérifie $\det Q = 1$ et $\det R = 1 = \det A$.

b) $\det A = \det Q \det R$ avec $\det R = \prod r_{ii} > 0$, donc $\det Q$ a le signe de $\det A$, et $\det Q = 1$.

c) T^{++} est convexe, $SO(n)$ est connexe par arcs, et GL_n^+ est l'image de $SO(n) \times T^{++}$ par le produit, continu.

d) Si $\det A = 1$, alors $\det R = 1$. L'ensemble T_1 des $R \in T^{++}$ de déterminant 1 est connexe par arcs : avec $r_{ii} = \mathrm{e}^{x_i}$, $\sum x_i = 0$, le chemin de diagonale $\mathrm{e}^{(1-t)x_i}$ (produit 1) et de coefficients $(1-t)r_{ij}$ hors diagonale relie R à I_n. Donc $SL_n(\mathbb{R})$, image de $SO(n) \times T_1$, est connexe par arcs.

Réponse. $A = QR$ avec $Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; GL_n^+ et SL_n images continues de $SO(n) \times T^{++}$ et $SO(n) \times T_1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).