Plaquette 2 – Montrer qu'une partie est connexe par arcs : exemples et contre-exemples

Connexité par arcs — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Pour prouver.

— Convexe ⇒ étoilé ⇒ connexe par arcs.

— Image continue, produit fini, réunion avec un point commun (ou réunion croissante) de connexes par arcs : connexe par arcs.

— Coordonnées polaires : la couronne $\{a \leq \|(x,y)\| \leq b\}$ est l'image du rectangle $[a,b]\times[0,2\pi]$ par

$$(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Pour réfuter.

— Trouver $\varphi : A \to \mathbb{R}$ continue, deux points $p, q \in A$ et une valeur c strictement entre $\varphi(p)$ et $\varphi(q)$ que φ ne prend pas sur A.

— Forme linéaire non nulle : $\mathbb{R}^n \setminus \ker \ell$ a **deux** composantes, $\{\ell > 0\}$ et $\{\ell < 0\}$.

Correction de l'exercice 1 – Parties du plan

a) P est l'épigraphe de la fonction **convexe** $x \mapsto x^2$: si $y_1 \geq x_1^2$ et $y_2 \geq x_2^2$, alors pour $t \in [0,1]$

$$(1-t)y_1 + ty_2 \geq (1-t)x_1^2 + tx_2^2 \geq ((1-t)x_1 + tx_2)^2$$

Donc P est convexe, connexe par arcs.

b) Sur Q, $x^2 \geq 1 + y^2 \geq 1$, donc $|x| \geq 1$: la fonction continue $(x,y)\mapsto x$ prend les valeurs 1 (en $(1,0)$) et -1 (en $(-1,0)$) mais jamais 0. Q n'est pas connexe par arcs ; ses deux parties $Q \cap \{x \geq 1\}$ et $Q \cap \{x \leq -1\}$ sont ses composantes.

c) Le disque et le segment sont convexes et ont le point $(1,0)$ en commun : leur réunion R est connexe par arcs.

Réponse. P convexe : oui ; Q : non (deux composantes) ; R : oui (deux convexes avec un point commun).

Correction de l'exercice 2 – Couronne et coordonnées polaires

a) $(a,0)$ et $(-a,0)$ sont dans C, mais leur milieu $(0,0)$ n'y est pas $(0 < a)$.

b) C est l'image du rectangle $[a,b]\times[0,2\pi]$, convexe donc connexe par arcs, par l'application continue $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$: tout point de C s'écrit ainsi avec $r = \sqrt{x^2+y^2} \in [a,b]$. L'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs.

c) On relie $(a,0)$ à (b,π) dans le rectangle par un segment, puis on compose par Φ :

$$\gamma(t) = \Phi(a + t(b-a), t\pi) = ((a+t(b-a))\cos(\pi t), (a+t(b-a))\sin(\pi t))$$

On a $\gamma(0) = (a,0)$, $\gamma(1) = (-b,0)$, et $\|\gamma(t)\| = a + t(b-a) \in [a,b]$.

Réponse. Non convexe, mais image continue d'un rectangle : connexe par arcs ; chemin en spirale $\Phi(a+t(b-a), \pi t)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Graphe d'une fonction

a) Γ_f est l'image de l'intervalle I (connexe par arcs) par l'application continue

$$t \mapsto (t, f(t))$$

donc Γ_f est connexe par arcs.

b) Non : l'abscisse, continue sur le graphe, prend les valeurs -1 et 1 sans jamais valoir 0.

c) Non. Un chemin $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ dans Γ_g de $(0,0)$ à $(1,1)$ aurait une seconde coordonnée γ_2 continue à valeurs dans $\{0,1\}$, donc constante par le TVI : impossible puisque $\gamma_2(0) = 0$ et $\gamma_2(1) = 1$. La continuité de f en a) est donc essentielle.

Réponse. Graphe d'une fonction continue sur un intervalle : connexe par arcs ; $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction en escalier : non.

Correction de l'exercice 4 – Complémentaire d'un hyperplan, d'une droite de l'espace

a) $H_+ = \{\ell > 0\}$ et $H_- = \{\ell < 0\}$ sont **convexes** (si $\ell(x) > 0$ et $\ell(y) > 0$, alors $\ell((1-t)x + ty) = (1-t)\ell(x) + t\ell(y) > 0$), donc connexes par arcs. Un chemin γ de H_+ à H_- dans $\mathbb{R}^n \setminus H$ est exclu : $\ell \circ \gamma$, continue, changerait de signe sans s'annuler. Les composantes sont donc H_+ et H_-.

b) L'application

$$\Psi : (u, z) \mapsto (u_1, u_2, z), \qquad (u, z) \in \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\right) \times \mathbb{R}$$

est une bijection continue sur $\mathbb{R}^3 \setminus D$. Or $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs (on contourne l'origine) et $\mathbb{R}$ aussi, donc leur produit l'est, et $\mathbb{R}^3 \setminus D$ aussi comme image continue. Une droite ne sépare pas l'espace, alors qu'un plan le sépare.

Réponse. $\mathbb{R}^n \setminus H$: deux demi-espaces ouverts ; $\mathbb{R}^3$ privé d'une droite : connexe par arcs.

Correction de l'exercice 5 – Le plan privé d'une partie dénombrable

a) Les segments $[a, c]$ et $[a, c']$ issus de a ont des directions distinctes ($c \neq c'$ sont deux points de Δ, et $a \notin \Delta$), donc ne se rencontrent qu'en a ; de même pour ceux issus de b. Un point commun à $[a, c]$ et $[c', b]$ (autre que a, b) est exclu car $[a, c]$ est d'un côté de Δ (celui de a, sauf c) et $[c', b]$ de l'autre côté (sauf c'), et $c \neq c'$.

b) Les ensembles $L_c \setminus \{a, b\}$, $c \in \Delta$, sont deux à deux disjoints et en quantité **non dénombrable**. Chaque point de D est dans au plus un d'entre eux, donc au plus une quantité dénombrable de L_c rencontre D :

$$\operatorname{card}\{c \in \Delta \mid L_c \cap D \neq \varnothing\} \leq \operatorname{card} D$$

Il reste des c (une infinité) pour lesquels la ligne brisée L_c, chemin continu de a à b, évite D.

c) Oui : $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable.

Réponse. Une infinité non dénombrable de lignes brisées disjointes : l'une évite D ; $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ est connexe par arcs.

Correction de l'exercice 6 – Partie étoilée non convexe

a) $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ sont dans E ($|xy| = 1$), mais leur milieu $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ vérifie $\frac{25}{16} > 1$.

b) Pour $(x, y) \in E$ et $t \in [0, 1]$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$|(tx)(ty)| = t^2|xy| \leq 1$$

donc le segment $[0,(x,y)]$ est inclus dans E : E est étoilée en 0, donc connexe par arcs (chemin $M \to O \to M'$).

c) Non. Sur cette partie, $x \neq 0$ et $y \neq 0$; la fonction continue $(x,y) \mapsto xy$ y est à valeurs dans $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. Elle prend les valeurs 1 (en $(1,1)$) et -1 (en $(1,-1)$), mais jamais 0 : pas connexe par arcs. On vérifie qu'il y a quatre composantes, une par quadrant.

Réponse. E étoilée en 0 non convexe : connexe par arcs ; $\{|xy| \geq 1\}$: quatre composantes.

Correction de l'exercice 7 – Sphères en dimension au moins deux

a) Soient $a, b \neq 0$. Si $0 \notin [a,b]$, le segment convient. Sinon $b = -\lambda a$ avec $\lambda > 0$; comme $n \geq 2$, on choisit c non colinéaire à a : les segments $[a,c]$ et $[c,b]$ ne contiennent pas 0 (sinon c serait colinéaire à a), d'où un chemin $a \to c \to b$.

b) L'application

$$N : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

est continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (quotient de fonctions continues, dénominateur non nul) et surjective sur S ($N(s) = s$ pour $s \in S$). L'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs.

c) Pour $n = 1$, $S = \{-1,1\}$ n'est pas connexe par arcs, et $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non plus : l'argument du contournement exige deux directions indépendantes.

Réponse. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ connexe par arcs pour $n \geq 2$, donc $S = N(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ aussi ; faux pour $n = 1$.

Correction de l'exercice 8 – Deux cercles et un pont

a) φ est continue sur A à valeurs dans $\{1,2\}$. Si un chemin γ reliait $(1,0)$ à $(2,0)$ dans A, la fonction $\varphi \circ \gamma$ serait continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\{1,2\}$, donc constante par le TVI :

$$\varphi(\gamma(0)) = 1 \neq 2 = \varphi(\gamma(1))$$

contradiction.

b) Les deux cercles sont connexes par arcs (images de $[0,2\pi]$), le segment aussi ; le segment rencontre le petit cercle en $(1,0)$ et le grand en $(2,0)$. Par réunions successives avec un point commun, l'ensemble est connexe par arcs.

c) Non : sur $\mathbb{R}^2$ privé du cercle, φ ne prend pas la valeur 1, mais vaut 0 en l'origine et 2 en $(2,0)$. Deux composantes : le disque ouvert et l'extérieur.

Réponse. Deux cercles : deux composantes ; avec le pont : connexe par arcs ; le plan privé d'un cercle : deux composantes.

Correction de l'exercice 9 – Produit de connexes par arcs

a) Pour (a,b) et (a',b') dans $A \times B$, soient α un chemin de a à a' dans A et β un chemin de b à b' dans B. Alors

$$\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$$

est continu (composantes continues), à valeurs dans $A \times B$, de (a,b) à (a',b').

b) Le cylindre est l'image de $\mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}$ par $((x,y),z) \mapsto (x,y,z)$; le cercle S^1 et $\mathbb{R}$ sont

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

connexes par arcs, donc leur produit et son image aussi.

c) La projection $p_1 : (x, y) \mapsto x$ est continue et $p_1(A \times B) = A$ (car $B \neq \varnothing$) : A est l'image continue d'un connexe par arcs. De même pour B.

Réponse. Chemin produit (α, β) ; cylindre $= \mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}$ connexe par arcs ; réciproque par les projections.

Correction de l'exercice 10 – La courbe du sinus du topologue

a) Γ est le graphe de la fonction continue $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$: connexe par arcs. Pour $y \in [-1, 1]$, écrivons $y = \sin\theta$; les points $x_k = \frac{1}{\theta + 2k\pi}$ vérifient $(x_k, \sin \frac{1}{x_k}) = (x_k, y) \to (0, y)$, donc $(0, y) \in \overline{\Gamma}$.

b) L'ensemble $\{\gamma_1 = 0\}$ est fermé (continuité), non vide (contient 0), donc contient son sup : $\gamma_1(t_0) = 0$, et $t_0 < 1$. Pour $t > t_0$, $\gamma_1(t) \neq 0$, et $\gamma_1 \geq 0$ sur S.

c) γ_1 est continue, $\gamma_1(t_0) = 0$ et $\gamma_1 > 0$ sur $]t_0, 1]$; par le TVI, γ_1 prend sur $]t_0, t_0 + \eta[$ toutes les valeurs de $]0, \gamma_1(t_0 + \eta)[$, en particulier des valeurs $\frac{1}{\pi/2 + 2k\pi}$ et $\frac{1}{3\pi/2 + 2k\pi}$ pour k grand, où

$$\gamma_2 = \sin \frac{1}{\gamma_1} = 1 \quad \text{et} \quad \gamma_2 = -1$$

Ainsi γ_2 prend les valeurs 1 et -1 arbitrairement près de t_0 : elle n'est pas continue en t_0. Contradiction : S, adhérent à un connexe par arcs, n'est pas connexe par arcs.

Réponse. Γ connexe par arcs, $S \subset \overline{\Gamma}$, mais aucun chemin ne relie le segment vertical à Γ : l'adhérence d'un connexe par arcs ne l'est pas toujours.

Correction de l'exercice 11 – Image d'un disque par une forme quadratique

a) D est convexe donc connexe par arcs, et compact ; q est continue. Donc $q(D)$ est un intervalle (connexité) compact (compacité) : un segment $[m, M]$.

b) On a

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}, \qquad \chi_S(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{4}, \qquad \mathrm{Sp}S = \left\langle -\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} \right\rangle$$

Par le théorème spectral, dans une base orthonormée de vecteurs propres, $q = \frac{\sqrt{5}}{2}(u^2 - v^2)$ avec $u^2 + v^2 = x^2 + y^2 \leq 1$. Donc $|q| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ sur D, et les bornes sont atteintes en des vecteurs propres unitaires. Ainsi

$$q(D) = \left[-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} \right]$$

Réponse. $q(D) = \left[-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} \right]$ (connexe + compact, bornes = valeurs propres extrêmes).

Correction de l'exercice 12 – Polynômes du second degré à deux racines réelles

a) $\Omega = \left\langle c < \frac{b^2}{4} \right\rangle$. Soient (b, c) et (b', c') dans Ω, et $c^* = \min(c, c', -1)$. Le chemin formé de trois segments

$$(b, c) \to (b, c^*) \to (b', c^*) \to (b', c')$$

reste dans Ω : sur le premier segment vertical, l'ordonnée reste $\leq c < \frac{b^2}{4}$ (et de même sur

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

le dernier, $\leq c' < \frac{b'^2}{4}$) ; sur le segment horizontal, $c^* < 0 \leq \frac{\beta^2}{4}$ pour tout β.

b) $\left\langle c > \frac{b^2}{4} \right\rangle$ est l'épigraphe strict de la fonction convexe $b \mapsto \frac{b^2}{4}$: si $c_1 > \frac{b_1^2}{4}$ et $c_2 > \frac{b_2^2}{4}$, la convexité donne $(1-t)c_1 + tc_2 > \frac{((1-t)b_1 + tb_2)^2}{4}$.

c) Non : la fonction continue $\delta(b,c) = b^2 - 4c$ prend les valeurs 1 (en $(1,0)$) et -4 (en $(0,1)$) sans s'annuler sur cet ensemble. Ses deux composantes sont les ensembles décrits en a) et b).

Réponse. Deux racines réelles : connexe par arcs ; sans racine réelle : convexe ; leur réunion : deux composantes.

Correction de l'exercice 13 – Réunion croissante et peigne

a) Pour $x, y \in A$, il existe i, j avec $x \in A_i$, $y \in A_j$; en posant $k = \max(i,j)$, on a $x, y \in A_k$ par croissance, et un chemin dans $A_k \subset A$ les relie.

b) La base $B = [0,1] \times \{0\}$ est convexe ; chaque dent $\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$ (et la dent $\{0\} \times [0,1]$) est un segment rencontrant B en son pied. Les parties

$$A_N = B \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup \bigcup_{n=1}^{N} \left(\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \times [0,1] \right)$$

sont connexes par arcs (réunions de connexes ayant un point commun avec B) et croissantes, de réunion P : P est connexe par arcs par a).

c) Non : les dents y deviennent disjointes. La fonction continue $(x,y) \mapsto x$ prend les valeurs 1 et $\frac{1}{2}$ mais aucune valeur de $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$; chaque dent est une composante.

Réponse. Réunion croissante : connexe par arcs ; peigne : oui ; sans sa base : une composante par dent.

Correction de l'exercice 14 – Un damier de composantes

a) $\sin x$ est du signe de $(-1)^k$ sur $]k\pi, (k+1)\pi[$ et nul aux multiples de π. Donc

$$\sin x \sin y > 0 \Leftrightarrow x \in]k\pi, (k+1)\pi[,\ y \in]l\pi, (l+1)\pi[\text{ avec } (-1)^{k+l} = 1$$

soit $(x,y) \in C_{k,l}$ avec $k+l$ pair.

b) Chaque carré est convexe donc connexe par arcs. Un chemin $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ dans U partant de $C_{k,l}$ ne peut en sortir : sinon γ_1 ou γ_2 franchirait un multiple de π par le TVI, où $\sin\gamma_1 \sin\gamma_2 = 0$, hors de U.

c) Les couples $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ avec $k+l$ pair sont en nombre infini dénombrable : U a une infinité dénombrable de composantes.

Réponse. Composantes : les carrés $C_{k,l}$ avec $k+l$ pair, en nombre infini dénombrable.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : hyperboloïdes et cône

a) Pour $c > 0$, $(x,y,z) \in Q_c \Leftrightarrow x^2 + y^2 = c + z^2$, et l'application continue

$$\Phi(\theta, z) = \left(\sqrt{c+z^2}\cos\theta, \sqrt{c+z^2}\sin\theta, z \right)$$

envoie le convexe $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ sur Q_c (coordonnées polaires du point (x,y), de module $\sqrt{c+z^2} > 0$). Hyperboloïde à une nappe : connexe par arcs.

b) Pour $c < 0$: $z^2 = x^2 + y^2 - c \geq -c > 0$, donc $|z| \geq \sqrt{-c}$. La fonction continue z ne prend pas la valeur 0 mais prend des valeurs de signes opposés : pas connexe par arcs. Chaque

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

nappe $\{z > 0\}$ ou $\{z < 0\}$ est l'image de $\mathbb{R}^2$ par $(x, y) \mapsto \left(x, y, \pm\sqrt{x^2 + y^2 - c}\right)$, continue : deux composantes.

c) Q_0 est étoilé par rapport à l'origine : si $x^2 + y^2 = z^2$, alors $(tx)^2 + (ty)^2 = (tz)^2$.

d) Comme en b), z ne s'annule plus (sinon $x = y = z = 0$) et prend les deux signes : deux composantes, les deux demi-cônes ouverts.

Réponse. $c > 0$: une nappe connexe par arcs ; $c < 0$: deux nappes ; $c = 0$: cône étoilé connexe par arcs, deux composantes sans le sommet.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).