Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : équations fonctionnelles, ensembles de polynômes et de matrices

Connexité par arcs — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Monotonie. f continue et injective sur un intervalle $\Rightarrow$ f strictement monotone ; la composée de deux fonctions strictement monotones de même sens est strictement croissante.

Valeurs atteintes. Pour f continue sur un connexe par arcs A et $p \in A$ tel que $A \setminus \{p\}$ reste connexe par arcs, $f(A \setminus \{p\})$ est un intervalle.

Relations coefficients-racines (degré 3). Pour $X^3 + pX + q = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \qquad p = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \qquad q = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

et le discriminant vaut $\Delta = -4p^3 - 27q^2$: trois racines réelles distinctes si $\Delta > 0$, une seule racine réelle si $\Delta < 0$.

Correction de l'exercice 1 – Projections continues de la droite

a) $\mathbb{R}$ est connexe par arcs et f continue : I est un intervalle. Si $y = f(x) \in I$:

$$f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$$

b) Soit $y_k \in I$ convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Par continuité, $f(\ell) = \lim f(y_k) = \lim y_k = \ell$, donc $\ell = f(\ell) \in I$. Ainsi I est un intervalle fermé : par exemple $]0,1[$ est impossible.

c) Pour $[a,b]$: $f(x) = \min(\max(x,a),b)$ (on « écrase » sur le segment), continue, égale à l'identité sur $[a,b]$. Pour $[0,+\infty[$: $f(x) = |x|$, car $||x|| = |x|$. Pour $\mathbb{R}$: $f = \mathrm{id}$. Dans chaque cas $f \circ f = f$ car f est l'identité sur son image.

Réponse. f est l'identité sur son image I, intervalle fermé ; exemples : écrêtage sur $[a,b]$, $|x|$, id.

Correction de l'exercice 2 – Pas de racine carrée continue de la symétrie

a) Une telle f serait injective : $f(x) = f(y) \Rightarrow -x = f(f(x)) = f(f(y)) = -y$. Continue et injective sur l'intervalle $\mathbb{R}$, elle serait strictement monotone ; alors $f \circ f$ serait strictement **croissante** (croissante composée croissante, ou décroissante composée décroissante). Or

$$f \circ f = -\mathrm{id} \text{ est strictement décroissante}$$

contradiction.

b) La rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, $g(x,y) = (-y,x)$, vérifie $g(g(x,y)) = g(-y,x) = (-x,-y)$.

c) Dans $\mathbb{R}$, « injective continue $\Rightarrow$ monotone » repose sur la connexité de $\{(x,y) \mid x < y\}$ et sur le fait qu'un point sépare la droite. Dans $\mathbb{R}^2$, il n'y a pas d'ordre compatible et un point ne sépare pas le plan : la rotation contourne l'origine.

Réponse. f serait injective donc monotone, et $f \circ f$ croissante : impossible ; dans $\mathbb{R}^2$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ convient.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Involutions continues de la droite

a) f est bijective (de réciproque f), donc injective ; continue et injective sur un intervalle, elle est strictement monotone.

b) Si f est croissante et $f(x) > x$ pour un x, alors $x = f(f(x)) \geq f(x) > x$: absurde ; de même si $f(x) < x$. Donc $f = \mathrm{id}$.

c) Par b), f est strictement décroissante, donc $g(x) = f(x) - x$ aussi. Soit x avec $f(x) \neq x$:

$$g(f(x)) = f(f(x)) - f(x) = x - f(x) = -g(x)$$

g prend des valeurs de signes stricts opposés en x et $f(x)$: elle s'annule (TVI), et une seule fois (stricte décroissance).

d) $a - (a - x) = x$, point fixe $\frac{a}{2}$; $\frac{1}{1/x} = x$, point fixe 1 (sur l'intervalle $]0, +\infty[$, le raisonnement est identique).

Réponse. Involution continue : id, ou strictement décroissante avec un unique point fixe (ex. $a - x$, point fixe $\frac{a}{2}$).

Correction de l'exercice 4 – Valeurs atteintes une seule fois

a) Comme p est le seul antécédent de c, on a $f(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) = f(\mathbb{R}^2) \setminus \{c\} = I \setminus \{c\}$.

b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ est connexe par arcs, donc $I \setminus \{c\}$ est un intervalle. Si c était intérieur à I, on aurait $a < c < b$ avec $a, b \in I \setminus \{c\}$, intervalle qui devrait contenir c : absurde. Donc c est une extrémité de I, atteinte en p :

$$c = \max f \quad \text{ou} \quad c = \min f$$

c) $x^2 - y^2$ n'a ni maximum ni minimum (t^2 et $-t^2$ en $(t, 0)$ et $(0, t)$) : par b), aucune valeur n'est atteinte une seule fois. Pour $x^2 + y^2$, la valeur 0 est atteinte en $(0, 0)$ seulement : c'est bien le minimum, et toute autre valeur $r^2 > 0$ est atteinte sur tout un cercle.

Réponse. Une valeur atteinte une seule fois est un extremum ; $x^2 - y^2$ n'en a pas ; pour $x^2 + y^2$, seul le minimum 0.

Correction de l'exercice 5 – Pas de fonction prenant chaque valeur exactement deux fois

a) Une fonction constante prend sa valeur une infinité de fois. Le maximum M est atteint (compacité), donc exactement deux fois, en $a < b$.

b) Choisissons $\delta > 0$ tel que $[a - \delta, a + \delta] \subset]0, 1[$ ne contienne pas b, et un point $b' \neq b$ de $[0, 1]$ hors de $[a - \delta, a + \delta]$, à distance $\leq \delta$ de b. En ces trois points, $f < M$ (M n'est atteint qu'en a et b). Pour

$$\max(f(a - \delta), f(a + \delta), f(b')) < y < M$$

le TVI donne un antécédent de y dans $]a - \delta, a[$, un dans $]a, a + \delta[$ et un entre b' et b : trois antécédents distincts, contradiction.

c) Si $a = 0$ et $b = 1$, le minimum $m < M$ est atteint en deux points $c < d$ de $]0, 1[$ (pas aux bornes, où f vaut M). Le même argument autour de c et de d, intérieurs, donne pour $y > m$ proche de m quatre antécédents. Dans tous les cas, contradiction : une telle fonction n'existe pas.

Réponse. Autour d'un extremum intérieur, les valeurs voisines sont atteintes deux fois, plus une fois près de l'autre point : au moins trois antécédents.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Complémentaire d'un sous-espace de codimension au moins deux

a) $x \in F \Leftrightarrow x = x_F \Leftrightarrow x_G = 0$, par unicité de la décomposition.

b) $\dim G = n - \dim F \geq 2$, donc $G \setminus \{0\}$ est connexe par arcs (on contourne l'origine). Soient $x, y \notin F$ et β un chemin de x_G à y_G dans $G \setminus \{0\}$. Le chemin

$$\gamma(t) = (1-t)x_F + ty_F + \beta(t)$$

est continu, relie x à y, et sa composante sur G est $\beta(t) \neq 0$: par a), $\gamma(t) \notin F$.

c) F est alors un hyperplan $\ker \ell$ et $E \setminus F$ a deux composantes, $\{\ell > 0\}$ et $\{\ell < 0\}$: dans le raisonnement, G est une droite et $G \setminus \{0\}$ n'est plus connexe par arcs.

Réponse. On fait varier la composante sur G dans $G \setminus \{0\}$, connexe par arcs car $\dim G \geq 2$; un hyperplan, lui, sépare.

Correction de l'exercice 7 – Composantes d'un ouvert et ouverts de la droite

a) Soit C une composante et $x \in C$, $B(x, r) \subset U$. La boule est convexe, donc chacun de ses points est relié à x dans U : $B(x, r) \subset C$.

b) Chaque composante, ouverte et non vide, contient un point de $\mathbb{Q}^n$ (dense). Les composantes étant disjointes, on obtient une injection de l'ensemble des composantes dans $\mathbb{Q}^n$, dénombrable.

c) Pour $n = 1$, les composantes sont des parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$, donc des intervalles, et ouvertes par a) : des intervalles ouverts $]a_k, b_k[$ (bornes éventuellement infinies). Ainsi

$$U = \bigcup_{k \in K}]a_k, b_k[, \qquad K \text{ au plus dénombrable}$$

(réunion disjointe). Par exemple $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k, k+1[$.

Réponse. Composantes ouvertes, chacune contient un point rationnel : au plus dénombrables ; un ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion disjointe dénombrable d'intervalles ouverts.

Correction de l'exercice 8 – Fonctions qui ne s'annulent pas

a) Si $f \in N$ prenait des valeurs de signes opposés, elle s'annulerait par le TVI sur $[0, 1]$. Donc $f > 0$ ou $f < 0$.

b) Si $f, g > 0$, alors $(1-t)f + tg > 0$ pour $t \in [0, 1]$; de même pour N_-.

c) δ est continue (et même 1-lipschitzienne) :

$$|f(0) - g(0)| \leq \|f - g\|_\infty$$

Le long d'un chemin dans N, δ ne s'annule pas, donc garde son signe : on ne passe pas de N_+ à N_-. Les composantes sont N_+ et N_- (convexes, non vides : ± 1).

d) Z est étoilé par rapport à la fonction nulle : si $f(x_0) = 0$, alors $(tf)(x_0) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. C'est l'analogue, en dimension infinie, de « $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes et $\{\det = 0\}$ est étoilé ».

Réponse. $N = N_+ \cup N_-$ (réunion disjointe), deux convexes séparés par $f \mapsto f(0)$; Z étoilé en 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Racines carrées continues d'une fonction

a) $h = \frac{f}{g}$ est continue sur A et $h^2 = 1$, donc h est à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Une fonction continue à valeurs réelles sur un connexe par arcs a pour image un intervalle ; inclus dans $\{-1, 1\}$, c'est un singleton : h est constante.

b) Oui : sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x$ et $g(x) = |x|$ vérifient $f^2 = g^2$, sans que $f = \pm g$.

c) $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$ est continue et ne s'annule pas, donc

$$f = \sqrt{1 + x^2} \quad \text{ou} \quad f = -\sqrt{1 + x^2}$$

d) Avec l'argument continu θ du plan fendu, $g(z) = \sqrt{|z|}\, e^{i\theta(z)/2}$ est une racine carrée continue qui ne s'annule pas. Le plan fendu est connexe par arcs (étoilé par rapport à 1), donc par a) il y a exactement **deux** racines carrées continues, g et $-g$.

Réponse. f / g continue à valeurs ± 1 : constante ; $f = \pm\sqrt{1 + x^2}$; deux racines carrées continues sur le plan fendu.

Correction de l'exercice 10 – Fonctions localement constantes

a) Soit $t_0 \in [0, 1]$ et V un voisinage de $\gamma(t_0)$ où f est constante. Par continuité de γ, $\gamma(t) \in V$ pour t proche de t_0, donc $\varphi(t) = \varphi(t_0)$ au voisinage de t_0 :

$$\varphi'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = 0$$

b) φ est dérivable de dérivée nulle sur l'intervalle $[0, 1]$: constante, et $f(\gamma(1)) = f(\gamma(0))$. Deux points quelconques étant reliés par un chemin, f est constante.

c) Toute boule centrée en 0 contient des matrices de rang n (εI_n) : le rang n'est pas localement constant en 0. Sur $GL_n(\mathbb{R})$, il vaut constamment n — trivialement localement constant. Le théorème est donc cohérent ; l'intérêt est ailleurs : $\operatorname{sgn} \det$ est localement constante sur $GL_n(\mathbb{R})$ (continuité de det), non constante, ce qui prouve à nouveau que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Réponse. $f \circ \gamma$ de dérivée nulle : f constante sur un connexe par arcs ; $\operatorname{sgn} \det$ localement constante non constante sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 11 – Polynômes unitaires strictement positifs

a) Si $P, Q \in P_{2m}$ et $t \in [0, 1]$, $(1 - t)P + tQ$ est unitaire de degré $2m$ (même coefficient dominant 1) et

$$(1 - t)P(x) + tQ(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

b) $X^{2m} + \frac{1}{k} \in P_{2m}$ converge vers X^{2m}, qui s'annule en 0 : pas fermé. $X^{2m} + k \in P_{2m}$ avec $a_0 = k \to +\infty$: pas borné.

c) Si P est unitaire de degré impair, $P(x) \to +\infty$ en $+\infty$ et $P(x) \to -\infty$ en $-\infty$: P prend des valeurs des deux signes sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et s'annule par le TVI. Cette dichotomie de parité explique que l'on n'étudie la positivité qu'en degré pair.

Réponse. P_{2m} convexe, ni fermé ni borné ; en degré impair, il y a toujours une racine réelle (TVI).

Correction de l'exercice 12 – Matrices complexes stables

a) On pose $T(t)$ triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $(1 - t)\lambda_i - t$ et de coefficients hors diagonale $(1 - t)T_{ij}$. Les valeurs propres de $T(t)$ sont ses coefficients diagonaux, et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathrm{Re}((1-t)\lambda_i - t) = (1-t)\mathrm{Re}\lambda_i - t < 0$$

(le demi-plan $\{\mathrm{Re} z < 0\}$ est convexe et contient -1). On a $T(0) = T$ et $T(1) = -I_n$.

b) $\gamma(t) = PT(t)P^{-1}$ est continu, semblable à $T(t)$ donc dans S, et relie A à $P(-I_n)P^{-1} = -I_n$. Tout point de S est relié à $-I_n$: S est connexe par arcs.

c) A est déjà triangulaire ($P = I_2$) : $\gamma(t) = \begin{pmatrix} -1 & 5(1-t) \\ 0 & -2+t \end{pmatrix}$, de valeurs propres -1 et $-2 + t < 0$ pour $t \in [0, 1]$.

Réponse. On ramène diagonale et coefficients au-dessus vers $-I_n$ dans le demi-plan convexe $\{\mathrm{Re} z < 0\}$: S connexe par arcs.

Correction de l'exercice 13 – Le groupe linéaire complexe par trigonalisation

a) $\mathbb{C}^*$ est le plan privé d'un point : connexe par arcs. Explicitement, avec $t_{ii} = re^{i\alpha}$, le chemin $\gamma_i(t) = r^{1-t}e^{i(1-t)\alpha}$ convient.

b) Soit $T(t)$ triangulaire supérieure de diagonale $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)$ et de coefficients $(1-t)t_{ij}$ au-dessus. Alors

$$\det\left(PT(t)P^{-1}\right) = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i(t) \neq 0$$

donc $t \mapsto PT(t)P^{-1}$ est un chemin dans $GL_n(\mathbb{C})$, de A à $PI_nP^{-1} = I_n$. Toute matrice inversible étant reliée à I_n, $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

c) Dans $\mathbb{R}$, un coefficient diagonal négatif devrait rejoindre 1 dans $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas connexe par arcs ; le produit des $\gamma_i(t)$, continu et de signe initial négatif, s'annulerait.

Réponse. On relie chaque coefficient diagonal à 1 dans $\mathbb{C}^*$ et on annule le reste : A est reliée à I_n ; impossible dans $\mathbb{R}^*$.

Correction de l'exercice 14 – Sous-groupes connexes par arcs de la droite

a) Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles ; $0 \in G$ et $x \in G \Rightarrow -x \in G$.

b) Soit $a \in G$, $a \neq 0$; quitte à changer de signe, $a > 0$, et $[-a, a] \subset G$ (intervalle symétrique). Par récurrence, $[-ka, ka] \subset G$ pour tout $k \geq 1$: tout $x \in [-(k+1)a, (k+1)a]$ s'écrit $x = y + z$ avec $y, z \in \left[-\frac{(k+1)a}{2}, \frac{(k+1)a}{2}\right] \subset [-ka, ka]$, et G est stable par addition. Donc

$$G = \bigcup_{k \geq 1} [-ka, ka] = \mathbb{R}$$

c) Ce sont des sous-groupes différents de $\{0\}$ et de $\mathbb{R}$ (ils sont dénombrables).

d) ln est un isomorphisme continu de $(]0, +\infty[, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$, de réciproque exp continue : il conserve la connexité par arcs. Les sous-groupes connexes par arcs sont $\{1\}$ et $]0, +\infty[$.

Réponse. Un sous-groupe connexe par arcs de $\mathbb{R}$ est $\{0\}$ ou $\mathbb{R}$; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$ ne le sont pas.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : polynômes de degré trois et discriminant

a) Par les relations coefficients-racines, $\Phi(\lambda) = (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, -\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$ envoie K sur Ω_3 : tout polynôme de Ω_3 a trois racines réelles distinctes, de somme nulle, que l'on ordonne. K est convexe (intersection d'un plan et de demi-espaces ouverts), Φ est polynomiale : Ω_3 est connexe par arcs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Soit $(p, q) \in \Omega_1$, c'est-à-dire $4p^3 + 27q^2 > 0$, et $P = \max(p, 1)$. On enchaîne trois segments :

$$(p, q) \to (P, q) \to (P, 0) \to (1, 0)$$

Sur le premier, p augmente donc $4p^3 + 27q^2$ aussi ; sur le deuxième, $4P^3 + 27q'^2 \geq 4P^3 > 0$; sur le troisième, $4p'^3 > 0$ pour $p' \geq 1$. Le chemin reste dans Ω_1.

c) Δ est continue et ne s'annule pas sur $\{\Delta \neq 0\}$: son signe est constant le long d'un chemin. Les composantes sont Ω_3 et Ω_1, connexes par arcs et non vides.

d) $p = -3$: $\Delta = 108 - 27q^2 > 0 \Leftrightarrow |q| < 2$. Pour $q = 0$: racines $0, \pm\sqrt{3}$. Pour $q = 2$: $X^3 - 3X + 2 = (X - 1)^2(X + 2)$, racine double, $\Delta = 0$.

Réponse. Ω_3 image continue d'un convexe, Ω_1 relié à $(1, 0)$: deux composantes ; $X^3 - 3X + q$ a trois racines réelles distinctes ssi $|q| < 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).