Plaquette 4 – Théorème des valeurs intermédiaires généralisé et invariants topologiques

Connexité par arcs — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Image d'un connexe par arcs. Si A est connexe par arcs et $f : A \to \mathbb{R}$ continue, $f(A)$ est un intervalle ; si A est de plus compact, c'est un segment $[\min f, \max f]$.

Fonction auxiliaire antisymétrique. Si g est continue sur un intervalle et $g(b) = -g(a)$, alors g s'annule sur $[a, b]$. Exemple sur le cercle :

$$g(\theta) = f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) - f\left(-\mathrm{e}^{i\theta}\right), \qquad g(\pi) = -g(0)$$

Ouvert-fermé. Si A est connexe par arcs et $U \subset A$ est à la fois ouvert et fermé relativement à A, alors $U = \varnothing$ ou $U = A$.

Invariant topologique. Si $h : X \to Y$ est un homéomorphisme, h induit un homéomorphisme de $X \setminus \{x\}$ sur $Y \setminus \{h(x)\}$: les deux ont le même nombre de composantes connexes par arcs.

Correction de l'exercice 1 – Parties ouvertes et fermées d'un connexe par arcs

a) γ est continue de $[0, 1]$ dans A ; l'image réciproque d'un ouvert (resp. fermé) relatif de A est un ouvert (resp. fermé) de $[0, 1]$.

b) $\gamma^{-1}(U)$ est fermé, non vide (0 y est), donc contient s : $\gamma(s) \in U$. Comme $\gamma(1) = b \notin U$, $s < 1$. Mais $\gamma^{-1}(U)$ est aussi ouvert : il contient un intervalle $[s, s + \eta[$ avec $\eta > 0$, ce qui contredit

$$s = \sup \gamma^{-1}(U)$$

c) $U = \mathbb{Q} \cap \left]-\infty, \sqrt{2}\right[= \mathbb{Q} \cap \left]-\infty, \sqrt{2}\right]$ est ouvert et fermé relativement à $\mathbb{Q}$ (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$), non vide ($0 \in U$) et distinct de $\mathbb{Q}$ ($2 \notin U$). Donc $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe par arcs, ce que confirme le TVI : un chemin continu de 0 à 2 prendrait la valeur irrationnelle $\sqrt{2}$.

Réponse. Dans un connexe par arcs, les seules parties ouvertes et fermées sont $\varnothing$ et A ; $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe par arcs.

Correction de l'exercice 2 – Points fixes en dimension un

a) $h(x) = f(x) - x$ est continue sur $[a, b]$, avec $h(a) = f(a) - a \geq 0$ et $h(b) = f(b) - b \leq 0$. Par le TVI (image d'un intervalle par une fonction continue), h s'annule :

$$\exists c \in [a, b], \quad f(c) = c$$

b) Non dans les deux cas : $x \mapsto x^2$ envoie $]0, 1[$ dans lui-même sans point fixe ($x^2 = x \Rightarrow x \in \{0, 1\}$), et $x \mapsto x + 1$ n'a pas de point fixe sur $\mathbb{R}$. La compacité de $[a, b]$ est essentielle (elle garantit les signes aux bornes).

c) $k = f - g$ est continue, $k(0) = -g(0) \leq 0$ et $k(1) = 1 - g(1) \geq 0$: par le TVI, k s'annule. Interprétation : le graphe de f, qui relie deux coins opposés du carré, rencontre le graphe de toute fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

Réponse. $f(x) - x$ change de signe : point fixe sur un segment ; faux sur $]0, 1[$ ou $\mathbb{R}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Cordes horizontales

a) La somme est télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=f(1)-f(0)=0$$

b) Les nombres $g\left(\frac{k}{n}\right)$ ont une somme nulle : soit l'un est nul, soit deux d'entre eux sont de signes stricts opposés. Dans les deux cas, g, continue sur l'intervalle $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$, s'annule (TVI) en un x : la corde horizontale $\left[x,x+\frac{1}{n}\right]$ existe.

c) On paramètre la boucle par la fraction $x\in[0,1]$ du parcours, l'altitude f étant continue avec $f(0)=f(1)$ (retour au départ). Avec $n=3$, il existe x tel que $f\left(x+\frac{1}{3}\right)=f(x)$: le tronçon de 20 km commençant au point x a ses extrémités à la même altitude.

Réponse. La somme des $g(k/n)$ est nulle, donc g s'annule : corde horizontale de longueur $\frac{1}{n}$; tronçon de 20 km.

Correction de l'exercice 4 – Points antipodaux sur un cercle

a) Soit $g(\theta)=f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)-f\left(-\mathrm{e}^{i\theta}\right)$, continue sur $[0,\pi]$. Comme $\mathrm{e}^{i\pi}=-1$:

$$g(\pi)=f(-1)-f(1)=-g(0)$$

Donc $g(0)$ et $g(\pi)$ sont nuls ou de signes opposés, et g s'annule en un θ_0 (TVI) : $z=\mathrm{e}^{i\theta_0}$ convient.

b) La température étant une fonction continue sur l'équateur (un cercle), il existe à tout instant deux points diamétralement opposés de l'équateur à la même température.

c) Si $f:\mathrm{U}\to\mathbb{R}$ est continue, a) fournit $z\neq -z$ avec $f(z)=f(-z)$: f n'est pas injective. En particulier, le cercle n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

Réponse. $g(\theta)=f(\mathrm{e}^{i\theta})-f(-\mathrm{e}^{i\theta})$ vérifie $g(\pi)=-g(0)$: il s'annule ; pas d'injection continue $\mathrm{U}\to\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 5 – Segments, intervalles et cercle ne sont pas homéomorphes

a) Une partie de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs si et seulement si c'est un intervalle.

— $[0,1]\setminus\{x\}$ est un intervalle si et seulement si $x\in\{0,1\}$: **deux** points « non séparants ».
— $[0,1[\setminus\{x\}$: seulement pour $x=0$, **un** point.
— $]0,1[\setminus\{x\}$ n'est jamais un intervalle : **aucun** point.
— $\mathrm{U}\setminus\{z\}$ est connexe par arcs pour **tout** z : c'est l'image de l'intervalle $]\theta_0,\theta_0+2\pi[$ par $\theta\mapsto\mathrm{e}^{i\theta}$, où $z=\mathrm{e}^{i\theta_0}$.

b) Un homéomorphisme $h:X\to Y$ envoie $X\setminus\{x\}$ sur $Y\setminus\{h(x)\}$ homéomorphiquement, donc conserve la propriété « $X\setminus\{x\}$ est connexe par arcs ». Le nombre de points non séparants est donc un invariant :

$$[0,1]:2,\qquad [0,1[:1,\qquad]0,1[:0,\qquad \mathrm{U}:\text{tous}$$

Ces nombres étant distincts, les quatre espaces sont deux à deux non homéomorphes.

Réponse. Points non séparants : 2, 1, 0 et une infinité : quatre espaces deux à deux non homéomorphes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Des lettres non homéomorphes

a) Chacune est une réunion de segments (convexes) ayant un point commun : connexe par arcs.

b) Retirer un point intérieur d'un segment le coupe en deux. Le nombre de composantes de la lettre privée de p vaut le nombre de « branches » issues de p :

— I : au plus 2 (point intérieur) ;
— T : 3 en retirant le point de jonction, au plus 2 ailleurs ;
— X : 4 en retirant le croisement, au plus 2 ailleurs.

Par exemple pour X privé du croisement O : les quatre demi-segments $B_1, \dots, B_4$ (sans O) sont connexes par arcs. Chaque B_i est fermé relativement à X $\setminus \{O\}$ (car $B_i \cup \{O\}$ est un segment fermé), donc aussi ouvert (son complémentaire est la réunion des trois autres, fermés) : par l'exercice 1, un chemin qui part de B_i y reste.

c) Un homéomorphisme conserve le nombre de composantes du complémentaire d'un point, donc le maximum N sur tous les points :

$$N(\mathrm{I}) = 2, \qquad N(\mathrm{T}) = 3, \qquad N(\mathrm{X}) = 4$$

Les trois lettres sont deux à deux non homéomorphes.

Réponse. Nombre maximal de composantes après retrait d'un point : 2, 3, 4 — invariant topologique distinct.

Correction de l'exercice 7 – Fonctions continues à valeurs rationnelles ou de carré imposé

a) $f(A)$ est un intervalle inclus dans $\mathbb{Q}$; un intervalle contenant deux points $p < q$ contient un irrationnel entre eux. Donc $f(A)$ est un singleton.

b) f est continue à valeurs dans $\{-1, 1\}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc constante : $f = 1$ ou $f = -1$.

c) Sur $]0, +\infty[$ (connexe par arcs), la fonction continue $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, donc constante, égale à ε_+ ; de même sur $]-\infty, 0[$, avec une constante ε_-. Et $f(0) = 0$. D'où quatre solutions :

$$f(x) = x, \quad f(x) = -x, \quad f(x) = |x|, \quad f(x) = -|x|$$

toutes continues. Les signes peuvent différer de part et d'autre de 0 parce que $\mathbb{R}^*$, où $\frac{f(x)}{x}$ est défini, n'est pas connexe par arcs.

Réponse. Valeurs rationnelles : constante ; $f^2 = 1$: ± 1 ; $f^2 = x^2$: x, $-x$, $|x|$, $-|x|$.

Correction de l'exercice 8 – Pas de racine carrée continue sur le cercle

a) h est continue (quotient de fonctions continues, dénominateur de module 1) et

$$h(\theta)^2 = \frac{g\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^2}{\mathrm{e}^{i\theta}} = 1$$

donc $h(\theta) \in \{-1, 1\}$.

b) Sur l'intervalle $\mathbb{R}$, h continue à valeurs dans $\{-1, 1\}$ est constante. Or $h(0) = g(1)$ et $h(2\pi) = \frac{g(1)}{\mathrm{e}^{i\pi}} = -g(1)$, avec $g(1) \neq 0$: $h(0) \neq h(2\pi)$. Contradiction.

c) Sur U $\setminus \{-1\}$, tout z s'écrit de façon unique $\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$, et $\theta = 2 \arctan \frac{\mathrm{Im} z}{1 + \mathrm{Re} z}$ dépend continûment de z. Alors $g(z) = \mathrm{e}^{i\theta/2}$ est continue et $g(z)^2 = z$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L'obstruction vient du « tour complet » du cercle.

Réponse. $h = g(\mathrm{e}^{i\theta}) / \mathrm{e}^{i\theta/2}$ serait constante, mais $h(2\pi) = -h(0)$; possible sur le cercle privé de -1.

Correction de l'exercice 9 – Argument continu sur le plan fendu

a) Si $x + |z| = 0$, alors $|z| = -x$, donc $y = 0$ et $x \leq 0$: $z \in \mathbb{R}_-$, exclu. Le quotient est continu sur Ω, et arctan est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Avec $t = \frac{y}{x+r}$, $r = |z|$, et $y^2 = r^2 - x^2 = (r-x)(r+x)$:

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{(x+r)^2 - y^2}{(x+r)^2 + y^2} = \frac{2x(x+r)}{2r(x+r)} = \frac{x}{r}$$

et de même $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2y(x+r)}{2r(x+r)} = \frac{y}{r}$. Donc $\mathrm{e}^{i\theta} = \frac{z}{r}$.

c) Si φ existait, $g(z) = \mathrm{e}^{i\varphi(z)/2}$ serait continue sur U avec $g(z)^2 = \mathrm{e}^{i\varphi(z)} = z$: impossible d'après l'exercice précédent.

Réponse. $\theta(z) = 2\arctan\frac{y}{x+|z|}$ est un argument continu sur le plan fendu ; aucun sur $\mathbb{C}^*$.

Correction de l'exercice 10 – Image d'une sphère par une forme linéaire

a) S est connexe par arcs (sphère de dimension ≥ 2, image continue de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ par $v \mapsto \frac{v}{\|v\|}$) et compacte (fermée bornée) ; f est continue. Donc $f(S)$ est un intervalle compact.

b) Avec $u = (1, 2, 2)$, $\|u\| = 3$:

$$|f(v)| = |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\| = 3$$

avec égalité pour $v = \pm\frac{u}{3}$. Donc $m = -3$ et $M = 3$.

c) $f(S) = [-3, 3]$: pour c dans ce segment, il existe $v \in S$ avec $f(v) = c$, c'est-à-dire un point de la sphère dans le plan. Géométriquement, la distance du centre au plan vaut $\frac{|c|}{3} \leq 1$.

Réponse. $f(S) = [-3, 3]$ (connexe + compact + Cauchy-Schwarz) ; le plan rencontre la sphère pour $|c| \leq 3$.

Correction de l'exercice 11 – Théorème du passage des douanes

a) Il existe une suite $t_k \to s$ avec $\gamma(t_k) \in A$ (caractérisation de la borne supérieure) ; par continuité, $\gamma(t_k) \to \gamma(s)$, donc $\gamma(s) \in \overline{A}$.

b) Si $\gamma(s)$ était intérieur à A : on aurait $s < 1$ (car $\gamma(1) \notin A$), et par continuité $\gamma(t) \in A$ pour $t \in [s, s+\eta]$, contredisant la définition de s. Donc

$$\gamma(s) \in \overline{A} \setminus \mathring{A} = \partial A$$

c) Avec $A = \{\|v\| < 1\}$ (disque ouvert) : $\gamma(0) = 0 \in A$, $\gamma(1) = (2, 0) \notin A$, et ∂A est le cercle unité. Variante par le TVI : $t \mapsto \|\gamma(t)\|$ passe de 0 à 2, donc prend la valeur 1.

Réponse. $\gamma(s)$ est adhérent mais pas intérieur à A : tout chemin qui sort de A traverse sa frontière.

Correction de l'exercice 12 – Ouverts connexes par arcs et lignes brisées

a) Soit $v \in V$ et $r > 0$ avec $B(v, r) \subset U$. Pour $w \in B(v, r)$, le segment $[v, w]$ est dans la boule (convexe), donc dans U : en le concaténant à la ligne brisée de a à v, on relie a à w. Donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$B(v, r) \subset V$.

b) Soit $w \in U \setminus V$ et $B(w, r) \subset U$. Si un point v de la boule était dans V, la ligne brisée de a à v prolongée par $[v, w]$ relierait a à w : exclu. Donc $B(w, r) \subset U \setminus V$.

c) V est ouvert et fermé relativement à U (son complémentaire dans U est ouvert), et non vide ($a \in V$). Par l'exercice 1, dans le connexe par arcs U :

$$V = U$$

d) Non : le cercle unité est connexe par arcs, mais ne contient aucun segment non réduit à un point ; deux points distincts n'y sont reliés par aucune ligne brisée.

Réponse. V ouvert et fermé dans U : dans un ouvert connexe par arcs, deux points sont reliés par une ligne brisée ; faux pour le cercle.

Correction de l'exercice 13 – Différentielle nulle sur un ouvert connexe par arcs

a) φ est dérivable sur $[0, 1]$ (composée), et par la règle de la chaîne

$$\varphi'(t) = \mathrm{d}f(a + t(b - a)) \cdot (b - a) = 0$$

donc φ est constante sur l'intervalle $[0, 1]$: $f(b) = \varphi(1) = \varphi(0) = f(a)$.

b) Deux points de U sont reliés par une ligne brisée $a = p_0, p_1, \ldots, p_k = b$ dans U ; en appliquant a) à chaque segment, $f(p_0) = f(p_1) = \ldots = f(p_k)$.

c) U a deux composantes (les quadrants ouverts $x, y > 0$ et $x, y < 0$). La fonction égale à 1 sur le premier et 0 sur le second est différentiable de différentielle nulle (localement constante sur un ouvert), mais n'est pas constante. La connexité par arcs est indispensable.

Réponse. f constante sur chaque segment, donc sur toute ligne brisée, donc sur U ; contre-exemple sur un ouvert à deux composantes.

Correction de l'exercice 14 – Théorème de Darboux par la connexité

a) T est convexe donc connexe par arcs, et τ est continue sur T : $\tau(T)$ est un intervalle.

b) Par l'égalité des accroissements finis, $\tau(x, y) = f'(c)$ pour un $c \in]x, y[$: $\tau(T) \subset f'(I)$. Et pour $x \in I$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \tau(x, x + h)$$

avec $(x, x + h) \in T$ pour h petit (I ouvert) : $f'(x) \in \overline{\tau(T)}$.

c) Soit $J = \tau(T)$, un intervalle, et $J \subset f'(I) \subset \bar{J}$. Toute partie comprise entre un intervalle et son adhérence est un intervalle (elle ne diffère de J que par d'éventuelles extrémités).

d) Non : la partie entière prend les valeurs 0 et 1 mais pas $\frac{1}{2}$; son image n'est pas un intervalle, alors que celle d'une dérivée l'est.

Réponse. $\tau(T) \subset f'(I) \subset \overline{\tau(T)}$ avec $\tau(T)$ intervalle : $f'(I)$ est un intervalle ; la partie entière n'est pas une dérivée.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : le théorème des deux crêpes

a) La fonction $a(c) = A(A \cap H_\theta(c))$ vaut 0 pour c assez petit et $A(A)$ pour c assez grand (A est borné). Continue, elle prend la valeur $\frac{1}{2}A(A)$ (TVI), et une seule fois car elle est strictement croissante là où elle est dans $]0, A(A)[$.

b) $u_{\theta+\pi} = -u_\theta$, donc $H_{\theta+\pi}(c) = \{\langle v, u_\theta \rangle \geq -c\}$. La droite $\langle v, u_\theta \rangle = c(\theta)$ partage A en deux moitiés, et elle s'écrit aussi $\langle v, u_{\theta+\pi} \rangle = -c(\theta)$: par unicité, $c(\theta + \pi) = -c(\theta)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $H_{\pi}(c(\pi)) = \{\langle v, u_0\rangle \geq c(0)\}$ est le demi-plan **complémentaire** de $H_0(c(0))$, à la droite près, d'aire nulle :

$$g(\pi) = A(B) - A(B \cap H_0(c(0))) - \frac{1}{2}A(B) = -g(0)$$

d) g est continue sur $[0, \pi]$ (on l'admet, comme composée de fonctions continues) avec $g(\pi) = -g(0)$: elle s'annule en un θ_0 (TVI). La droite $\langle v, u_{\theta_0}\rangle = c(\theta_0)$ coupe A en deux (par construction) et B en deux (car $g(\theta_0) = 0$).

Réponse. La droite bissectrice de A dans la direction θ dépend continûment de θ ; l'écart d'aire pour B change de signe entre 0 et π : une droite coupe les deux crêpes en deux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).