Plaquette 1 – Chemins, parties connexes par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Connexité par arcs — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On construit explicitement un **chemin** entre deux points, on utilise la **convexité** ou l'**étoilement** comme argument rapide, et on exploite le fait que l'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs (TVI généralisé).

Exercice 1 – Convexité et connexité

Montrer qu'une boule $B(a, r)$ d'un espace normé est connexe par arcs.

Exercice 2 – Plan privé d'un point

Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est connexe par arcs, contrairement à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercice 3 – Image continue

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(0) = -1$ et $f(3) = 5$. Que peut-on dire de $f([0\,;3])$?

Exercice 4 – Sphère connexe

La sphère unité de $\mathbb{R}^3$ est-elle connexe par arcs ? Et le cercle unité de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5 – Le groupe linéaire réel n'est pas connexe

Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 6 – Réunion de connexes

Soient A et B connexes par arcs avec $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe par arcs.

Exercice 7 – Composantes connexes

Déterminer les composantes connexes par arcs de $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\right\}$.

Exercice 8 – Partie étoilée

Montrer que $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$ (le plan fendu) est connexe par arcs.

Exercice 9 – Fonction localement constante

Soit A connexe par arcs et $f{:}A \to \mathbb{Z}$ continue. Montrer que f est constante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Théorème des valeurs intermédiaires généralisé

Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0,0) = -3$ et $f(1,1) = 4$. Montrer que f s'annule.

Exercice 11 – Connexité de SO(n)

Expliquer pourquoi $SO(2)$ est connexe par arcs, et en déduire l'existence d'un chemin entre I_2 et la rotation d'angle π.

Exercice 12 – Les deux branches d'une hyperbole

Soit $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$.

a) Montrer que $H_+ = H \cap \{x > 0\}$ et $H_- = H \cap \{x < 0\}$ sont connexes par arcs.

b) Montrer que H n'est pas connexe par arcs.

c) Combien la partie $H \cup \{(x,y) \mid y = x\}$ a-t-elle de composantes connexes par arcs ?

Exercice 13 – Injection continue et monotonie

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I \to \mathbb{R}$ continue et injective. On pose $T = \{(x,y) \in I^2 \mid x < y\}$.

a) Montrer que T est connexe par arcs.

b) En étudiant $\varphi(x,y) = f(y) - f(x)$ sur T, montrer que f est strictement monotone.

Exercice 14 – Pas d'injection continue du plan dans la droite

Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. On veut montrer que f n'est pas injective.

a) Montrer que $I = f(\mathbb{R}^2)$ est un intervalle.

b) On suppose f injective. Pour $p \in \mathbb{R}^2$, montrer que $I \setminus \{f(p)\}$ est un intervalle, puis que $f(p)$ est une extrémité de I.

c) Conclure.

Exercice 15 – Synthèse : parties connexes de R

Démontrer que les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement les **intervalles**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).