Plaquette 3 – Connexité par arcs des groupes et ensembles de matrices

Connexité par arcs — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Un ensemble de matrices est souvent l'**image continue** d'un ensemble plus simple : $g \mapsto gAg^{-1}$, $(P, \Delta) \mapsto P\Delta P^{-1}$, $(P, Q) \mapsto PJ_rQ$, $(Q, R) \mapsto QR$. On le montre connexe par arcs en prouvant que le domaine l'est, quitte à **corriger le signe** du déterminant de P par une matrice diagonale D qui commute avec la matrice centrale. Pour **séparer** des composantes, on utilise un invariant continu qui ne peut pas s'annuler (déterminant, coefficient, trace d'un projecteur, signe des pivots) ou qui est à valeurs entières.

Exercice 1 – Le groupe linéaire complexe est connexe par arcs

Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ et $p(z) = \det((1-z)A + zB)$ pour $z \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que p est une fonction polynomiale non nulle, et que son ensemble de racines Z est fini.

b) Justifier l'existence d'un chemin continu $z{:}[0,1] \to \mathbb{C} \setminus Z$ de 0 à 1.

c) En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

d) Pourquoi l'argument échoue-t-il dans $\mathbb{R}$?

Exercice 2 – Matrices de déterminant positif

On admet (pivot de Gauss) que toute $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit $A = T_1 \cdots T_k D(d)$, où les $T_j = I_n + \lambda_j E_{i_j l_j}$ $(i_j \neq l_j)$ sont des transvections et $D(d) = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, d)$ avec $d = \det A$.

a) Construire un chemin dans $GL_n(\mathbb{R})$ de I_n à une transvection $T = I_n + \lambda E_{il}$.

b) Montrer que $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{\det > 0\}$ est connexe par arcs.

c) En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ a exactement deux composantes connexes par arcs.

Exercice 3 – Le groupe spécial orthogonal

a) Soit $A \in SO(n)$. Avec la réduction des matrices orthogonales, montrer que $A = P\mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_m}, I_{n-2m})P^{\mathsf{T}}$ avec $P \in O(n)$ (on pourra regrouper les valeurs propres -1 par paires).

b) En déduire un chemin dans $SO(n)$ de I_n à A.

c) Montrer que $O(n)$ a exactement deux composantes connexes par arcs.

d) Donner un chemin explicite dans $SO(3)$ de I_3 à $\mathrm{diag}(-1, -1, 1)$.

Exercice 4 – Matrices symétriques inversibles de taille deux

Soit S^* l'ensemble des matrices symétriques réelles inversibles de taille 2.

a) Montrer que si $S \in S^*$ et $\det S > 0$, alors $\mathrm{tr} S \neq 0$.

b) En déduire que S^* a au moins trois composantes connexes par arcs, selon le signe de det et de tr.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que $\{S \in S^* \mid \det S < 0\}$ est connexe par arcs (diagonaliser avec $P \in SO(2)$).

d) Conclure : S^* a exactement trois composantes.

Exercice 5 – Projecteurs de rang donné

Soit P l'ensemble des projecteurs de $M_n(\mathbb{R})$ ($P^2 = P$) et P_r ceux de rang r. On pose $J_r = \mathrm{diag}(I_r, 0)$.

a) Montrer que $P_r = \{gJ_rg^{-1} \mid g \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

b) Montrer que $P_r = \{gJ_rg^{-1} \mid g \in GL_n^+(\mathbb{R})\}$, puis que P_r est connexe par arcs.

c) Montrer que P a exactement $n+1$ composantes connexes par arcs.

Exercice 6 – Matrices diagonalisables

a) Montrer que l'ensemble $D_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

b) Montrer que l'ensemble $D_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ est connexe par arcs.

c) Montrer plus simplement que $D_n(\mathbb{R})$ est étoilé par rapport à 0.

Exercice 7 – Matrices de rang donné

Soit $1 \leq r \leq n$ et R_r l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ de rang r.

a) Rappeler pourquoi $R_r = \{PJ_rQ \mid P, Q \in GL_n(\mathbb{R})\}$, avec $J_r = \mathrm{diag}(I_r, 0)$.

b) Pour $r < n$, montrer que R_r est connexe par arcs.

c) Que dire de R_n ?

d) L'ensemble des matrices de rang $\leq r$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 8 – Matrices de taille deux à valeurs propres réelles distinctes

Soit $\Omega_+ = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid (\mathrm{tr}M)^2 - 4\det M > 0\}$.

a) Montrer que Ω_+ est exactement l'ensemble des matrices ayant deux valeurs propres réelles distinctes.

b) Montrer que Ω_+ est l'image de $GL_2^+(\mathbb{R}) \times \{(\lambda_1, \lambda_2) \mid \lambda_1 > \lambda_2\}$ par une application continue, et conclure.

c) Exhiber un chemin dans Ω_+ de $\mathrm{diag}(1, 0)$ à $\mathrm{diag}(0, 1)$.

Exercice 9 – Exponentielle et déterminant positif

a) Montrer que $\det\exp(A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, et en déduire $\exp(M_n(\mathbb{R})) \subset GL_n^+(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\exp(M_n(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs.

c) Montrer que $\mathrm{diag}(-1, -2)$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle, bien qu'elle soit dans $GL_2^+(\mathbb{R})$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Matrices non inversibles

Soit $Z = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\}$.

a) Montrer que Z est fermé et connexe par arcs.

b) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$ et en déduire que Z est d'intérieur vide.

c) $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, Z aussi : pourquoi le complémentaire $GL_n(\mathbb{R})$ ne l'est-il pas ?

Exercice 11 – Matrices triangulaires inversibles

Soit T l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles de $M_n(\mathbb{R})$.

a) Pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$, on pose $T_\varepsilon = \{T \in T \mid \varepsilon_i t_{ii} > 0 \text{ pour tout } i\}$. Montrer que T_ε est convexe.

b) Montrer que T a exactement 2^n composantes connexes par arcs.

c) Combien de composantes pour les triangulaires supérieures inversibles **complexes** ?

Exercice 12 – Matrices de permutation et composantes

Pour $\sigma \in S_n$, on note P_σ la matrice de permutation ($P_\sigma e_j = e_{\sigma(j)}$).

a) Montrer que $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$.

b) En déduire que P_σ et P_τ sont dans la même composante connexe par arcs de $GL_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau)$.

c) Pour le cycle $c = (1\ 2\ 3)$ dans $\mathbb{R}^3$, identifier P_c comme une rotation et donner un chemin de I_3 à P_c dans $SO(3)$.

Exercice 13 – Sous-groupe contenant un voisinage de l'identité

Soit $G = GL_n^+(\mathbb{R})$ et H un sous-groupe de G contenant $V = G \cap B(I_n, r)$ pour un $r > 0$.

a) Montrer que H est ouvert dans G (pour $h \in H$, considérer hV).

b) Montrer que $G \setminus H$ est ouvert dans G.

c) Soit $g \in G$ et γ un chemin de I_n à g dans G. Montrer que $f = 1_H \circ \gamma$ est continue, et conclure que $H = G$.

d) En déduire que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices de GL_n^+ à distance $< r$ de I_n, pour tout $r > 0$.

Exercice 14 – Matrices de taille deux sans valeur propre réelle

Soit $\Omega_- = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (a-d)^2 + 4bc < 0 \right\}$.

a) Vérifier que $(a-d)^2 + 4bc$ est le discriminant de χ_M, et que Ω_- est l'ensemble des matrices réelles sans valeur propre réelle.

b) Montrer que $b \neq 0$ sur Ω_-, et en déduire que Ω_- n'est pas connexe par arcs.

c) Montrer que $\Omega_- \cap \{b > 0\}$ est connexe par arcs, et conclure.

d) Dans quelle composante se trouve la rotation R_θ, $\theta \in]0, \pi[$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : décomposition QR et groupes linéaires

On admet que toute $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit $A = QR$ avec $Q \in O(n)$ et R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0 (Gram-Schmidt sur les colonnes). On note T^{++} l'ensemble de ces matrices R.

a) Calculer la décomposition QR de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que $\det A > 0 \Rightarrow Q \in SO(n)$.

c) En déduire une seconde preuve de la connexité par arcs de $GL_n^+(\mathbb{R})$.

d) Montrer que $SL_n(\mathbb{R}) = \{\det = 1\}$ est connexe par arcs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).