Plaquette 2 – Montrer qu'une partie est connexe par arcs : exemples et contre-exemples

Connexité par arcs — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour montrer qu'une partie est **connexe par arcs**, on cherche dans l'ordre : la **convexité** (le segment suffit), l'**étoilement** (on passe par le centre), une **paramétrisation continue** par un connexe par arcs (rectangle, intervalle, $\mathbb{R}^n$ privé d'un point), ou une **réunion** de connexes par arcs enchaînés par des points communs. Pour montrer qu'une partie **n'est pas** connexe par arcs, on exhibe une fonction **continue** sur la partie qui prend deux valeurs sans prendre une valeur intermédiaire (TVI), ou à valeurs dans un ensemble discret et non constante. On dénombre ainsi les **composantes connexes par arcs**.

Exercice 1 – Parties du plan

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles connexes par arcs ? Justifier.

a) $P = \{(x, y) \mid y \geq x^2\}$.

b) $Q = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 \geq 1\}$.

c) $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup ([1, 3] \times \{0\})$.

Exercice 2 – Couronne et coordonnées polaires

Soit $0 < a < b$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq b\}$.

a) Montrer que C n'est pas convexe.

b) Montrer que C est connexe par arcs.

c) Exhiber un chemin explicite dans C de $(a, 0)$ à $(-b, 0)$.

Exercice 3 – Graphe d'une fonction

a) Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que le graphe Γ_f est connexe par arcs.

b) Le graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ est-il connexe par arcs ?

c) Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 0$ si $x \leq \frac{1}{2}$ et $g(x) = 1$ sinon. Son graphe est-il connexe par arcs ?

Exercice 4 – Complémentaire d'un hyperplan, d'une droite de l'espace

a) Soit ℓ une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$ et $H = \ker \ell$. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus H$ a exactement deux composantes connexes par arcs.

b) Soit D la droite $\{(0, 0, z)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathbb{R}^3 \setminus D$ est connexe par arcs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Le plan privé d'une partie dénombrable

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ une partie **dénombrable**, et $a \neq b$ deux points de $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

a) Pour c sur la médiatrice Δ de $[a,b]$, on note $L_c = [a,c] \cup [c,b]$. Montrer que si $c \neq c'$, alors $L_c \cap L_{c'} = \{a,b\}$.

b) En déduire qu'il existe $c \in \Delta$ tel que L_c évite D, puis que $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est connexe par arcs.

c) Application : $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 6 – Partie étoilée non convexe

Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |xy| \leq 1\}$.

a) Montrer que E n'est pas convexe.

b) Montrer que E est étoilée par rapport à l'origine, et en déduire qu'elle est connexe par arcs.

c) La partie $\{(x,y) \mid |xy| \geq 1\}$ est-elle connexe par arcs ?

Exercice 7 – Sphères en dimension au moins deux

Soit $n \geq 2$ et $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$, de sphère unité S.

a) Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.

b) En déduire que S est connexe par arcs.

c) Que dire pour $n = 1$?

Exercice 8 – Deux cercles et un pont

Soit $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 4\}$.

a) Montrer que A n'est pas connexe par arcs, en considérant $\varphi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

b) Montrer que $A \cup ([1,2] \times \{0\})$ est connexe par arcs.

c) Le plan privé du cercle unité est-il connexe par arcs ?

Exercice 9 – Produit de connexes par arcs

a) Soient $A \subset E$ et $B \subset F$ connexes par arcs. Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs.

b) En déduire que le cylindre $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1\}$ de $\mathbb{R}^3$ est connexe par arcs.

c) Réciproquement, si $A \times B$ est connexe par arcs (avec A, B non vides), montrer que A et B le sont.

Exercice 10 – La courbe du sinus du topologue

Soit $\Gamma = \left\langle \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \mid x > 0 \right\rangle$ et $S = \Gamma \cup (\{0\} \times [-1,1])$.

a) Montrer que Γ est connexe par arcs et que $S \subset \overline{\Gamma}$.

b) On suppose qu'il existe un chemin $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ dans S de $(0,0)$ à $\left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$. On pose $t_0 = \sup\{t \in [0,1] \mid \gamma_1(t) = 0\}$. Montrer que $\gamma_1(t_0) = 0$ et $\gamma_1(t) > 0$ pour $t > t_0$.

c) Montrer que γ_2 n'a pas de limite à droite en t_0, et conclure.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Image d'un disque par une forme quadratique

Soit $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $q(x, y) = x^2 + xy - y^2$.

a) Justifier que $q(D)$ est un segment.

b) Écrire la matrice symétrique S de q, calculer ses valeurs propres, et en déduire $q(D)$.

Exercice 12 – Polynômes du second degré à deux racines réelles

On identifie $X^2 + bX + c$ au point $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.

a) Montrer que l'ensemble $\Omega = \{(b, c) \mid b^2 - 4c > 0\}$ des polynômes à deux racines réelles distinctes est connexe par arcs.

b) Montrer que l'ensemble des polynômes sans racine réelle est convexe.

c) L'ensemble $\{(b, c) \mid b^2 - 4c \neq 0\}$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 13 – Réunion croissante et peigne

a) Soit (A_k) une suite croissante de parties connexes par arcs. Montrer que $A = \bigcup_k A_k$ est connexe par arcs.

b) Soit le **peigne** $P = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \cup \bigcup_{n \geq 1} \left(\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \times [0, 1] \right)$. Montrer que P est connexe par arcs.

c) Le peigne privé du segment $[0, 1] \times \{0\}$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 14 – Un damier de composantes

Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin x \sin y > 0\}$.

a) Montrer que U contient les carrés ouverts $C_{k,l} =]k\pi, (k+1)\pi[\times]l\pi, (l+1)\pi[$ avec $k + l$ pair, et qu'il en est la réunion.

b) Montrer que chaque $C_{k,l}$ est une composante connexe par arcs de U.

c) Combien U a-t-il de composantes ?

Exercice 15 – Synthèse : hyperboloïdes et cône

Pour $c \in \mathbb{R}$, soit $Q_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = c\}$.

a) Pour $c > 0$, montrer que Q_c est connexe par arcs à l'aide d'une paramétrisation par $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

b) Pour $c < 0$, montrer que Q_c a exactement deux composantes connexes par arcs.

c) Pour $c = 0$, montrer que le cône Q_0 est connexe par arcs.

d) Que devient Q_0 privé de l'origine ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).