Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : équations fonctionnelles, ensembles de polynômes et de matrices

Connexité par arcs — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Dans un problème, la connexité par arcs intervient de trois façons. **Imposer une forme** : une fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone, une fonction continue à valeurs dans $\{-1, 1\}$ est constante, ce qui tranche les équations fonctionnelles ($f \circ f = f$, $f \circ f = -\mathrm{id}$, $f^2 = g^2$). **Compter** : retirer un point, regarder où une valeur est atteinte, dénombrer des composantes grâce à un invariant continu (signe d'un discriminant, d'une évaluation). **Construire** : écrire un ensemble (polynômes à racines réelles, matrices stables) comme image continue d'un convexe, ou relier chaque point à un point de référence par un chemin explicite.

Exercice 1 – Projections continues de la droite

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = f$.

a) Montrer que $I = f(\mathbb{R})$ est un intervalle et que $f(y) = y$ pour tout $y \in I$.

b) Montrer que I est fermé.

c) Réciproquement, pour $I = [a, b]$, $I = [0, +\infty[$ et $I = \mathbb{R}$, exhiber une telle fonction d'image I.

Exercice 2 – Pas de racine carrée continue de la symétrie

a) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

b) Montrer qu'il existe en revanche une application linéaire continue $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $g \circ g = -\mathrm{id}$.

c) Quelle propriété de $\mathbb{R}$, absente de $\mathbb{R}^2$, explique la différence ?

Exercice 3 – Involutions continues de la droite

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \mathrm{id}$.

a) Montrer que f est strictement monotone.

b) Montrer que si f est croissante, alors $f = \mathrm{id}$.

c) On suppose $f \neq \mathrm{id}$. Montrer que f admet un unique point fixe.

d) Exemples : $f(x) = a - x$; et sur $]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 4 – Valeurs atteintes une seule fois

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue, et c une valeur atteinte en un **unique** point p.

a) Montrer que $f(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) = I \setminus \{c\}$, où $I = f(\mathbb{R}^2)$.

b) En déduire que c est le maximum ou le minimum de f.

c) Montrer que $f(x, y) = x^2 - y^2$ n'atteint aucune valeur une seule fois. Et $f(x, y) = x^2 + y^2$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Pas de fonction prenant chaque valeur exactement deux fois

On suppose que $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ est continue et que chaque valeur de $f([0,1])$ est atteinte exactement deux fois.

a) Montrer que f n'est pas constante et que son maximum M est atteint en exactement deux points $a<b$.

b) On suppose $a\in\,]0,1[$. Montrer qu'une valeur $y<M$ assez proche de M est atteinte au moins trois fois.

c) Traiter le cas $a=0$, $b=1$ à l'aide du minimum, et conclure.

Exercice 6 – Complémentaire d'un sous-espace de codimension au moins deux

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et F un sous-espace de dimension $\leq n-2$. On choisit un supplémentaire G de F et on écrit $x=x_F+x_G$.

a) Montrer que $x\notin F\Leftrightarrow x_G\neq 0$.

b) Montrer que $E\setminus F$ est connexe par arcs.

c) Que se passe-t-il si $\dim F=n-1$?

Exercice 7 – Composantes d'un ouvert et ouverts de la droite

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que chaque composante connexe par arcs de U est ouverte.

b) En déduire que U a au plus une infinité dénombrable de composantes.

c) En déduire que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion disjointe d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts.

Exercice 8 – Fonctions qui ne s'annulent pas

Soit $E=C([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, N l'ensemble des fonctions qui ne s'annulent pas, et $Z=E\setminus N$.

a) Montrer que $N=N_+\cup N_-$, où N_+ (resp. N_-) est l'ensemble des fonctions strictement positives (resp. négatives).

b) Montrer que N_+ et N_- sont convexes.

c) Montrer que N a exactement deux composantes connexes par arcs (utiliser $\delta:f\mapsto f(0)$).

d) Montrer que Z est connexe par arcs.

Exercice 9 – Racines carrées continues d'une fonction

Soit A connexe par arcs et $f,g:A\to\mathbb{C}$ continues avec $f^2=g^2$, g ne s'annulant pas.

a) Montrer que $f=g$ ou $f=-g$.

b) L'hypothèse « g ne s'annule pas » est-elle utile ?

c) Déterminer les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $f(x)^2=1+x^2$.

d) Combien existe-t-il de racines carrées continues de $z\mapsto z$ sur le plan fendu $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Fonctions localement constantes

Soit A une partie connexe par arcs et $f : A \to \mathbb{R}$ **localement constante** : tout point $x \in A$ admet un voisinage V tel que f soit constante sur $V \cap A$.

a) Soit γ un chemin dans A. Montrer que $\varphi = f \circ \gamma$ est dérivable de dérivée nulle sur $[0,1]$.

b) En déduire que f est constante.

c) Application : montrer que $A \mapsto \mathrm{rg} A$ n'est pas localement constante sur $M_n(\mathbb{R})$, mais l'est sur $GL_n(\mathbb{R})$; qu'en conclure ?

Exercice 11 – Polynômes unitaires strictement positifs

Pour $m \geq 1$, soit P_{2m} l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré $2m$ strictement positifs sur $\mathbb{R}$, vu comme partie de $\mathbb{R}^{2m}$ (coefficients $a_0, \dots, a_{2m-1}$).

a) Montrer que P_{2m} est convexe, donc connexe par arcs.

b) Montrer que P_{2m} n'est ni fermé ni borné.

c) Montrer que l'ensemble des polynômes unitaires de degré $2m+1$ sans racine réelle est vide.

Exercice 12 – Matrices complexes stables

Soit S l'ensemble des $A \in M_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres ont une partie réelle strictement négative.

a) Soit $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure. Construire un chemin $t \mapsto T(t)$ de matrices triangulaires de T à $-I_n$, à valeurs propres de partie réelle < 0.

b) En déduire que S est connexe par arcs.

c) Expliciter le chemin pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 – Le groupe linéaire complexe par trigonalisation

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, trigonalisée en $A = PTP^{-1}$, de coefficients diagonaux $t_{11}, \dots, t_{nn}$ non nuls.

a) Justifier l'existence, pour chaque i, d'un chemin γ_i dans $\mathbb{C}^*$ de t_{ii} à 1.

b) Construire un chemin dans $GL_n(\mathbb{C})$ de A à I_n, et conclure.

c) Pourquoi la même construction échoue-t-elle dans $GL_n(\mathbb{R})$ pour une matrice trigonalisable de déterminant négatif ?

Exercice 14 – Sous-groupes connexes par arcs de la droite

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ connexe par arcs.

a) Montrer que G est un intervalle symétrique contenant 0.

b) Si $G \neq \{0\}$, montrer que $G = \mathbb{R}$.

c) En déduire que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$ ne sont pas connexes par arcs.

d) Déterminer les sous-groupes connexes par arcs de $(]0, +\infty[, \times)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : polynômes de degré trois et discriminant

On identifie $X^3 + pX + q$ au point $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, de discriminant $\Delta = -4p^3 - 27q^2$. On pose $\Omega_3 = \{\Delta > 0\}$ (trois racines réelles distinctes) et $\Omega_1 = \{\Delta < 0\}$ (une seule racine réelle).

a) Montrer que Ω_3 est l'image du convexe $K = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\}$ par une application continue, et conclure.

b) Montrer que Ω_1 est connexe par arcs (relier tout point à $(1, 0)$).

c) Montrer que $\{\Delta \neq 0\}$ a exactement deux composantes connexes par arcs.

d) Pour quelles valeurs de q le polynôme $X^3 - 3X + q$ a-t-il trois racines réelles distinctes ? Vérifier pour $q = 0$ et $q = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).